Guía para resolver los ejercicios de Verdadero - Falso

En estos ejercicios que indicamos con Verdadero- Falso tenemos que tener en cuenta que el enunciado es una afirmación (proposición) de la cual debemos indicar su *valor de verdad*, es decir, si la afirmación es VERDADERA o bien FALSA.

- En el caso que sea verdadera se deberá justificar a través de una demostración aplicando definiciones o propiedades de los conceptos involucrados en la proposición.
- En el caso que sea falsa se deberá justificar ya sea haciendo una observación sobre una contradicción en la que incurre al considerar definiciones, propiedades o relaciones entre los conceptos involucrados o bien utilizando un ejemplo para indicar que se incurre en una contradicción (es recomendable ésta última opción).

Las proposiciones que se presentarán en estos ejercicios son dos tipos:

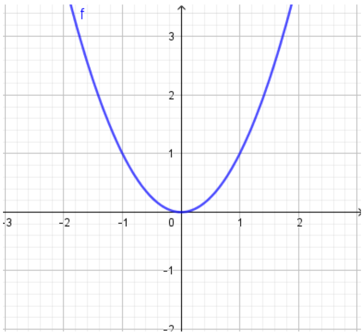
❖ *Una proposición que involucra un cuantificador universal*.

Por ejemplo:

<u>Todas</u> las funciones son crecientes.

En esta proposición prestemos atención a la expresión ¨ *Todas*¨ y a su significado.
La expresión ¨ *Todas*¨ (Todos) es un cuantificador universal.
En este caso la afirmación, si la considero verdadera, indica que estoy afirmando que *no existen* funciones decrecientes ni funciones que sean creciente en una parte de du dominio y decrecientes en otra.
En primer lugar para comenzar a analizar la proposición prestemos atención a las definiciones o propiedades de los conceptos involucrados .
En este caso recordemos, la definición de *función creciente*.
Se denomina *función creciente* a toda función que es creciente en *todo* su dominio.
Si repasamos mentalmente las gráficas de las funciones que hemos estudiado, podemos concluir que la afirmación es Falsa ya que hemos estudiado funciones que no son crecientes, por lo tanto podemos justificar la falsedad mediante un ejemplo.

Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^2$, su gráfica es



Y podemos observar que en el intervalo $(-\infty, 0)$ la función es decreciente.
(El hecho de encontrar una función que no es creciente contradice el cuantificador ¨*Todas*¨.)
Conclusión: la afirmación es Falsa.

❖ *Proposiciones compuestas que constan de dos proposiciones simples.*

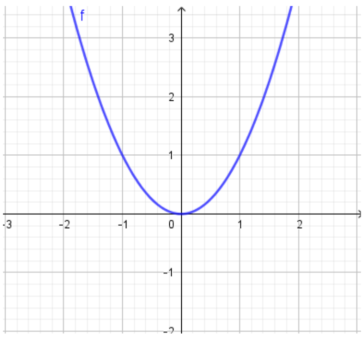
Por ejemplo:

Si una función f es una función par, entonces f es una función creciente.

La proposición compuesta contiene dos proposiciones simples: *f es una función par* y *f es una función creciente.*
Que están relacionadas con el conectivo, ***Si***……, ***entonces***......, denominado ***implicación.***

Si *una función f es una función par,* ***entonces*** *es una función creciente.*

La primera proposición se llama *antecedente o hipótesis* y la segunda proposición *consecuente, conclusión o tesis.*
Esta proposición compuesta es verdadera cuando el consecuente es verdadero al considerar verdadero el antecedente.
En este caso podemos preguntarnos lo siguiente: si tengo una función par cualquiera, puedo asegurar que ella es creciente?
Si pensamos en las funciones estudiadas ¿existe una función que sea par y sea No creciente?
Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^2$, su gráfica es



Y podemos observar que es una función par y que en el intervalo $(-\infty, 0)$ la función es decreciente.
Conclusión: la afirmación es Falsa.

Resolución del ejercicio 26 de la Guía TP2: Funciones (Parte II)

Ejercicio 26:

a) Si f y g son funciones, entonces $fog = gof$.

En primer lugar indiquemos la hipótesis, *f y g son funciones* y la conclusión, $fog = gof$.

(Esta proposición la podemos interpretar así, para cualquier par de funciones la composición de ellas en cualquier orden nos da la misma función. Si pensamos en considerar cualquier par de funciones ésta conclusión, $fog = gof$, no es cierta. Es decir, en este caso la afirmación es Falsa. Entonces buscaremos dos funciones para las cuales no se verifique la igualdad al conmutar las funciones en la composición de las mismas). (Entre paréntesis está lo que analizamos y a continuación lo que escribiremos)

Un contraejemplo.

Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$, realizamos las composiciones y obtenemos:

(A) $(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x+2) = (x+2)^2$.

(B) $(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = x^2 + 2$.

Como la expresión en (A) es diferente a la de (B), entonces No se verifica la igualdad $fog = gof$.

Conclusión la afirmación es FALSA.

b) Si f (x) es una función par, entonces 4f (x) - 3f (-x) = f (x).

La hipótesis es *f (x) es una función par* y la implicación está dada por la igualdad *4f(x)-3f(-x)=f(x).*

Ésta implicación nos dice que si tengo una función par ella verifica la ecuación planteada.

Por lo tanto, teniendo en cuenta la definición de función par,$f(-x) = f(x),\ \forall x \in Domf$, veremos si se verifica la igualdad planteada para ellas.

$$4f(x) - 3f(-x) = f(x)$$

Reemplazo en el primer miembro el hecho que $f(-x) = f(x)$,

$$4f(x) - 3f(x) = f(x)$$
$$f(x) = f(x)$$

Se verifica la igualdad, entonces la afirmación es VERDADERA.

c) Si f y g son funciones impares, entonces f + g es par.

La hipótesis es *f y g son funciones impares* y la implicación *f + g es par*. En este caso, tenemos dos opciones para justificar la respuesta; opción 1 tener encuentra definición o propiedades que verifiquen las funciones pares, opción dos, considerar un ejemplo.

Opción 1:

Debemos probar que la función *f + g* es par sabiendo que las funciones *f* y *g* son funciones impares.

Definición: h s una función par si $h(-x) = h(x)\ \ \forall x\ del\ dominio\ de\ h$.

$$\begin{aligned}(f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x)\\ &= -f(x) - g(x)\\ &= -[f(x) + g(x)]\\ &= -(f+g)(x)\end{aligned}$$

Es decir $(f+g)(-x) = -(f+g)(x)$, entonces teniendo en cuenta la definición de función impar, la función $(f+g)$ es una función impar.
Conclusión la afirmación es FALSA.

Opción 2: Un contraejemplo.
Sean las funciones impares $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3x^3$, si sumo ambas funciones obtenemos la función:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 + 3x^3 = 4x^3.$$

La función obtenida es una función impar.

Conclusión la afirmación es FALSA.

d) Si f (x) = 3 sen (2x), entonces la amplitud de f es 2.

Definición de amplitud: la función $f(x) = a\ sen\ k(x-b)$ tiene amplitud $|a|$.
Teniendo en cuenta la definición de amplitud, en esta función, la amplitud es 3.
Conclusión la afirmación es FALSA.

e) Si f (x) = cos (2x - π), entonces el ángulo de desfase de f es π.

Definición de ángulo de desfase: la función $f(x) = a\ sen\ k(x-b)$ tiene ángulo de desfase b.

Reescribimos la función *f* (*x*) = cos (2*x* - *π*)= cos (2(*x* – *π/2*)) y observamos que el ángulo de desfase es *π/2*.
Conclusión la afirmación es FALSA.

f) Si $\boldsymbol{f(x) = 3^x}$***, entonces*** $\boldsymbol{f(x-2) = \frac{3^x}{9}}$.
Teniendo en cuenta la definición de $f(x) = 3^x$, evaluemos *f* en *x - 2*

$$f(x-2) = 3^{x-2} = 3^x . 3^{-2} = 3^x . \frac{1}{3^2} = \frac{3^x}{9}$$

Conclusión la afirmación es VERDADERA.

g) Si $\boldsymbol{f(x) = 10^x}$***, entonces*** $\boldsymbol{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 10^x \frac{(10^h-1)}{h}}$.

Teniendo en cuenta la definición de $f(x) = 10^x$, veremos si se verifica la igualdad.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{10^{x+h} - 10^x}{h} = \frac{10^x 10^h - 10^x}{h} = 10^x \frac{(10^h - 1)}{h}$$

Conclusión la afirmación es VERDADERA.