

Ejercicios resueltos Guía práctica Funciones (Parte II)

Ejercicio 1: Realice los siguientes ejercicios, Sección 2.6: 5 – 7 – 10.

7) Dadas $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ y $g(x) = \sqrt{1+x}$. El Dominio de $f(x)$ serán todos los valores de x que le den sentido a esa expresión. Una raíz de índice par, sólo tiene sentido si su radicando es mayor o igual que cero, por lo que para hallar el dominio de dicha función, haremos

$$4 - x^2 \geq 0$$

$$4 \geq x^2$$

$$2 \geq |x| \text{ es decir}$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$\text{En términos de intervalo } [-2; 2]$$

De manera análoga, buscamos el dominio de $g(x)$

$$1 + x \geq 0$$

$$x \geq -1$$

$$\text{En términos de intervalo } [-1; +\infty)$$

- ✓ Ahora nos pide obtener $f + g$ y $f - g$. Las expresiones son

$$m(x) = (f + g)(x) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{1+x}$$

$$n(x) = (f - g)(x) = \sqrt{4-x^2} - \sqrt{1+x}$$

El dominio de estas nuevas funciones $m(x)$ y $n(x)$, resultará de la intersección de los dominios de las funciones que la componen, es decir $f(x)$ y $g(x)$. Esto se debe a que cuando quiera analizar la función en algún valor de x , este valor debe dar sentido a ambas expresiones que componen a las nuevas funciones. Por lo tanto, si analizamos donde se intersecan esos dominios, podemos deducir que el dominio de $m(x)$ como $n(x)$ será el intervalo $[-1; 2]$.

$$\text{Dominio } m = \text{Dominio } f \cap \text{Dominio } g = [-2; 2] \cap [-1; +\infty) = [-1; 2].$$

$$\text{Dominio } n = \text{Dominio } f \cap \text{Dominio } g = [-2; 2] \cap [-1; +\infty) = [-1; 2].$$

- Luego pide obtener $f \cdot g$.

$$y(x) = \sqrt{4-x^2} \sqrt{1+x} = \sqrt{(4-x^2) \cdot (1+x)}$$

$$\text{Dominio } y = \text{Dominio } f \cap \text{Dominio } g = [-1; 2].$$

- También pide obtener f/g

$$z(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{1+x}}$$

Esta función $z(x)$ tendrá sentido cuando el cociente de las dos expresiones que estén comprometidas pueda realizarse, y cuando el denominador sea distinto de 0.

$$\text{Dominio } z = \{x/ x \in \text{Dominio } f \cap \text{Dominio } g \text{ y } g(x) \neq 0\} = (-1; 2]$$

Ejercicio 16.d)

$$f(x) = e^{-x} - 3$$

Al tratarse de una función exponencial (con transformaciones) sabemos que el dominio va a ser:

I) Dominio: $f(x) = \mathcal{R}$

II) Asintotas:

Vertical: no tiene (ya la función exponencial solo tiene asíntota horizontal)

Horizontal: Como sabemos la función exponencial tiene asíntota horizontal: $y = 0$

Como f se encuentra desplazada 3 unidades hacia abajo su asíntota horizontal va a ser: $y = -3$

III) Intersección con los ejes coordenados

Con el eje y :

$$f(0) = e^{-0} - 3 = -2$$

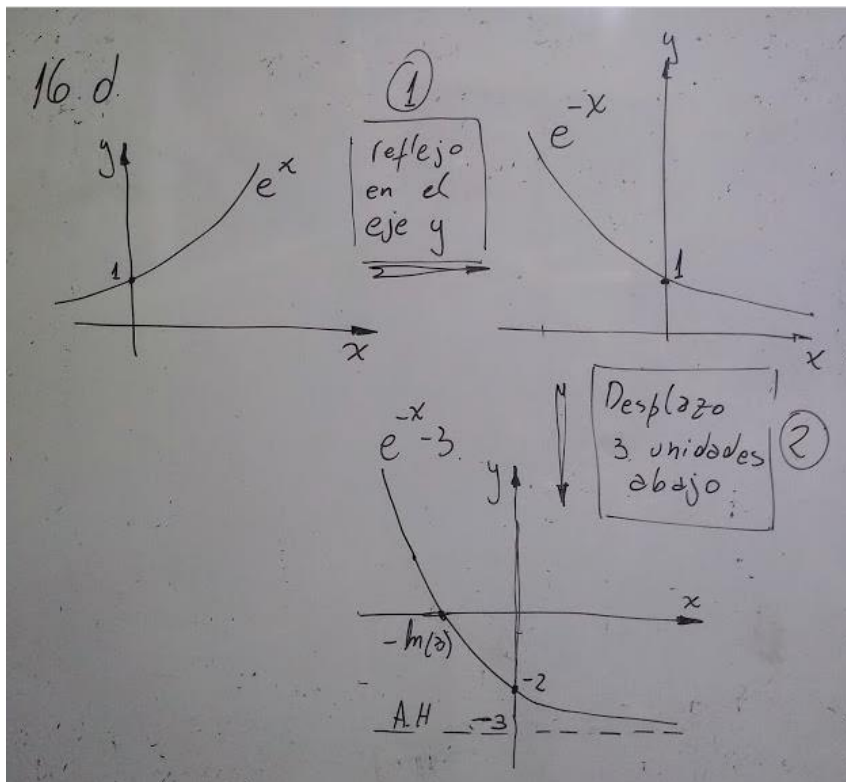
Rta: Intersecta al eje y en: $P(0, -2)$

Con el eje x :

$$f(x) = e^{-x} - 3 = 0 \Rightarrow e^{-x} = 3 \Rightarrow -x = \ln(3) \\ x = -\ln(3)$$

Rta: Intersecta al eje x en: $P(-\ln(3), 0)$

IV y V)



VI) f es positiva en $(\infty, -\ln(3))$ y es negativa en $(-\ln(3), \infty)$

VII) f es decreciente en todo su dominio.

VIII) Imagen de f : $(-3, \infty)$

Ejercicio 11 (inciso d)

Dada la función racional $g(x) = \frac{18}{(x+3)^2} + 1$:

- I. Determine su dominio.
- II. Determine la asíntota vertical y la asíntota horizontal.
- III. Encuentre los puntos de corte de la función con los ejes coordenados.
- IV. Calcule $g(-3)$, $g(\pi)$ y $g(\sqrt{2})$.
- V. Liste los desplazamientos necesarios para graficar la función a partir de su función base.
- VI. Grafique.
- VII. Según la gráfica, escriba los intervalos donde la función es positiva y donde es negativa.
- VIII. Según la gráfica, escriba los intervalos donde la función es creciente y donde es decreciente.
- IX. Escriba el conjunto Imagen.

Tenga en cuenta que para resolver cada uno de los ítems es necesario que lea atentamente dicho ítem identificando el objetivo y utilizando los conceptos/metodologías adecuados para llegar al mismo.

I. Determine su dominio.

Para encontrar el **dominio de una función racional** $\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right]$, analizamos la expresión del **denominador** e identificamos el/los valor/es de x que anulen al mismo. En este caso, debemos resolver la ecuación $(x + 3)^2 = 0$. Vemos que esta expresión se anula para $x = -3$. Es decir, x puede tomar cualquier valor excepto -3 . Entonces, escribimos el dominio de la siguiente manera:

$$\text{Dominio de } g: \{x \in \mathbb{R} / x \neq -3\}$$

II. Determine la asíntota vertical y la asíntota horizontal.

Podemos reconocer las asíntotas verticales y horizontales de la función de manera sencilla analizando su forma analítica. En este caso, la función posee una asíntota vertical de ecuación $x = -3$ ya que corresponde al valor de x que anula el denominador. Para obtener la asíntota horizontal, vemos que si x toma valores muy grandes, positivos o negativos ($x \rightarrow \pm\infty$), la función tiende al valor 1. Dicho valor corresponde a la asíntota horizontal de g de ecuación $y = 1$.

III. Encuentre los puntos de intersección con los ejes coordenados.

- Para hallar de manera analítica los puntos de intersección de la función con el eje x , resolvemos la ecuación $g(x) = 0$ y obtenemos, si existen, el/los valor/es de x donde la función se anula. De esta manera:

$$g(x) = \frac{18}{(x+3)^2} + 1 = 0$$

Realizamos pasajes de términos para despejar x :

$$\frac{18}{(x+3)^2} = -1$$

$$18 = -(x+3)^2$$

$$-18 = (x+3)^2$$

vemos que el segundo miembro siempre es positivo para todo número real, por lo tanto no puede ser igual a -18, luego la ecuación no puede resolverse en el campo de los números reales.

De esta manera, concluimos que **la función no corta al eje x** .

- Para hallar de manera analítica los puntos de intersección de la función con el eje y , evaluamos la función para $x = 0$, es decir, hallamos $g(0)$:

$$g(0) = \frac{18}{(0+3)^2} + 1 = \frac{18}{9} + 1 = 2 + 1 = 3$$

Entonces, concluimos que **la función corta al eje y en el punto $P(0, 3)$** .

IV. Calcule $g(-3)$, $g(\pi)$ y $g(\sqrt{2})$.

Para encontrar los valores de imagen correspondientes a los valores dados de x , simplemente reemplazamos en la función por dichos valores:

- $g(-3) = \nexists$; ($x = -3$ **no está incluido en el dominio de la función**)
- $g(\pi) = \frac{18}{(\pi+3)^2} + 1 \cong 1,5$
- $g(\sqrt{2}) = \frac{18}{(\sqrt{2}+3)^2} + 1 \cong 1,92$

V. Liste los desplazamientos necesarios para graficar la función a partir de su función base.

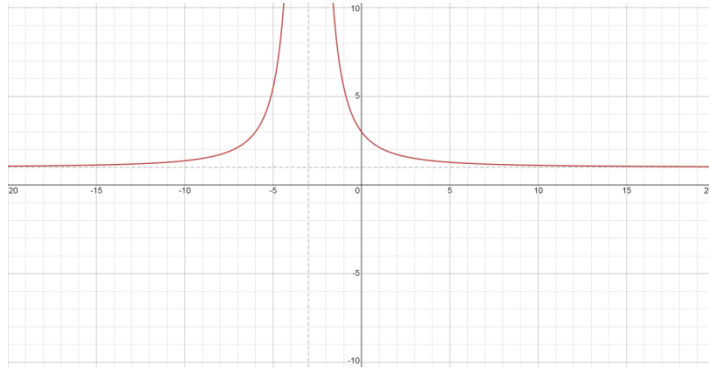
Tomando como función base a la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, reconocemos tres transformaciones aplicadas a la misma para obtener la expresión de $g(x)$:

- Desplazamiento horizontal de tres unidades a la izquierda, es decir: $f(x + 3)$
- Alargamiento vertical en un factor de 18, es decir: $18 f(x + 3)$
- Desplazamiento vertical de una unidad hacia arriba: $18 f(x + 3) + 1$

Una vez realizadas las transformaciones mencionadas, obtenemos la función $g(x)$.

VI. Grafique.

La siguiente gráfica fue obtenida con la aplicación **Mathway**. (Tenga en cuenta agregar los nombres de los ejes).



VII. Según la gráfica, escriba los intervalos donde la función es positiva y donde es negativa.

En este caso, debemos identificar los valores del dominio para los cuales $g(x) > 0$ y los valores del dominio para los cuales $g(x) < 0$.

A partir de la gráfica, concluimos que **la función es positiva en todo su dominio**. Escribimos los intervalos de positividad correspondientes: $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$.

VIII. Según la gráfica, escriba los intervalos donde la función es creciente y donde es decreciente.

De la misma manera que en el ítem anterior, identificamos los valores del dominio para los cuales la función crece y decrece.

- **Intervalo donde la función es creciente:** $(-\infty, -3)$
- **Intervalo donde la función es decreciente:** $(-3, \infty)$

IX. Escriba el conjunto Imagen.

A partir de la gráfica escribimos la imagen:

Imagen de $g(x)$: $\{y \in \mathbb{R} / y > 1\}$.