Coloquio II
Funciones Trigonométricas y su Gráfica

Liliana Taborda
ltaborda@ingenieria.uner.edu.ar

Leandro G. Escher
lgescher@ingenieria.uner.edu.ar

Juan F. Restrepo
jrestrepo@ingenieria.uner.edu.ar

Fabricio Rettore
frettore@ingenieria.uner.edu.ar

María Belén Ferster
mbferster@ingenieria.uner.edu.ar

Mauricio Riveras
mriveras@ingenieria.uner.edu.ar

Departamento Académico de Matemática
Cálculo en una Variable

Introducción

Funciones trigonométricas

Funciones trigonométricas desplazadas

Referencias

Temas de clase:

1. Funciones trigonométricas.

   Sección 5.2 Pág. 377.

2. Gráfica de funciones trigonométricas.

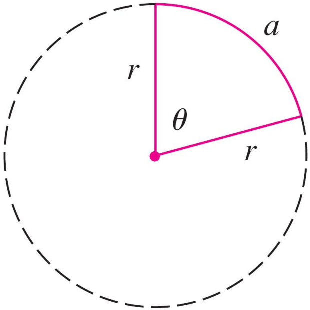
   Sección 5.3 Pág. 386.

Introducción

Los ángulos se puede medir en grados o en radianes.

Radián: Relación entre el radio de la circunferencia y la longitud de arco formada por el ángulo, es decir:

$$\theta = \frac{a}{r} \quad \text{radianes (rad).}$$

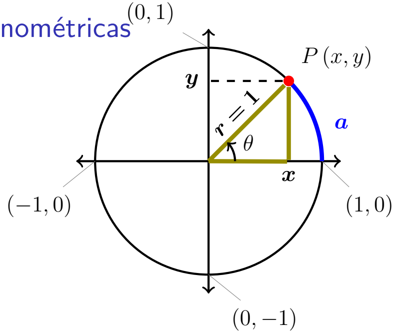


Introducción

Recordar que:

$$\pi\,\text{rad} = 180^\circ \quad \text{por tanto} \quad 1\,\text{rad} \approx 53.3^\circ$$

Funciones trigonométricas

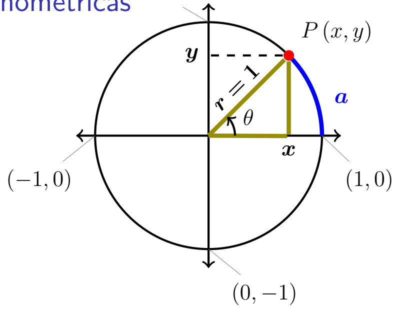


Definición: (Pág. 377 Stewart y col. (2016))

Funciones Trigonométricas:

1. $\operatorname{sen} a = \dfrac{y}{r} = y.$
2. $\cos a = \dfrac{x}{r} = x.$
3. $\tan a = \dfrac{y}{x} \quad x \neq 0$

Funciones trigonométricas



Definición: (Pág. 377 Stewart y col. (2016))

Funciones Trigonométricas:

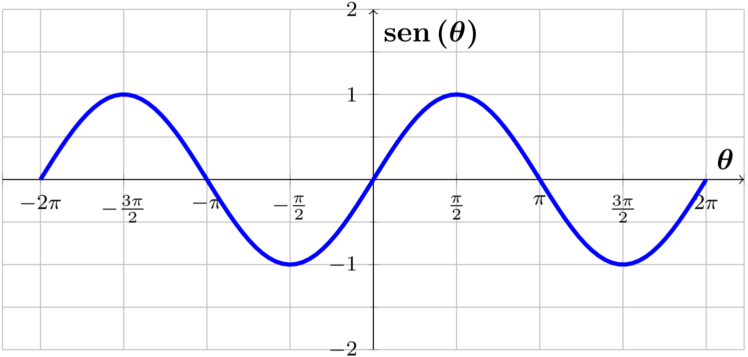
Si el ángulo θ se mide en radianes, entonces $\theta = a$ y:

1. $\operatorname{sen}\theta = y$.
2. $\cos\theta = x$.
3. $\tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad x \neq 0$

Funciones trigonométricas: seno

$$\operatorname{sen}\theta = y$$

Funciones trigonométricas: seno

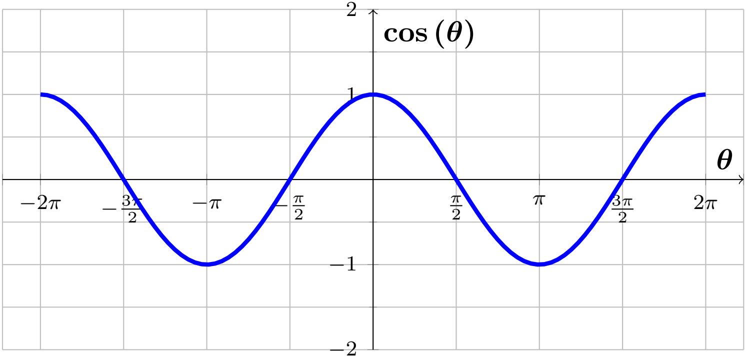


- Dominio: $\mathbb{R}$
- Imagen: $[-1, 1]$
- Periodo: $p = 2\pi$
- Función impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$

Funciones trigonométricas: coseno

$$\cos\theta = x$$

Funciones trigonométricas: coseno

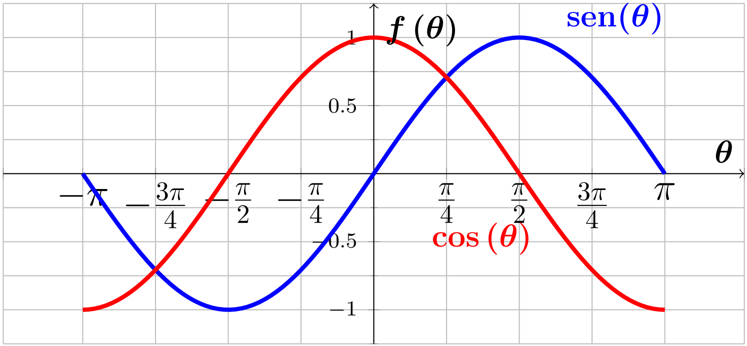


- Dominio: $\mathbb{R}$
- Imagen: $[-1, 1]$
- Periodo: $p = 2\pi$
- Función par: $\cos(-x) = \cos(x)$

Ejemplo:

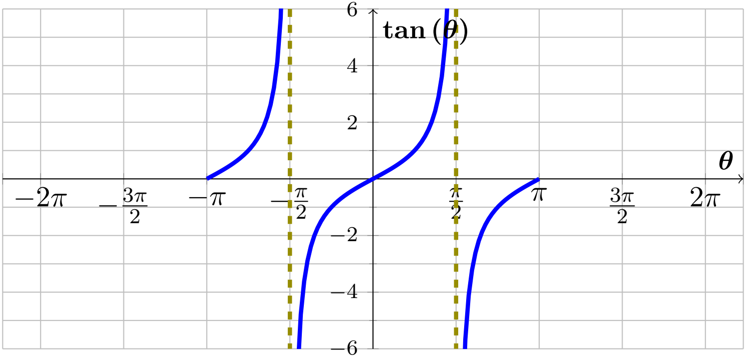
Teniendo en cuenta la gráfica de las funciones $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, esboce la gráfica de la función tangente en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$



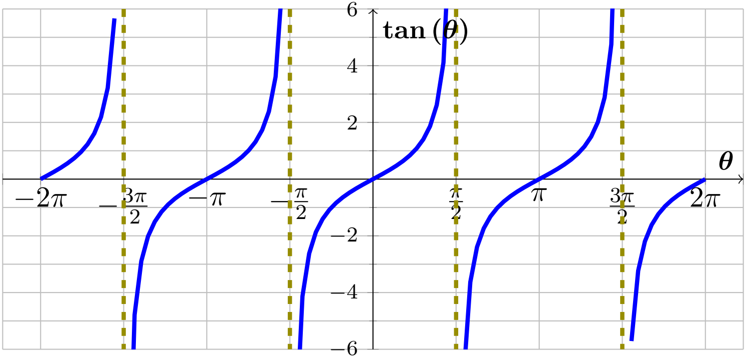
Funciones Trigonométricas: tangente

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$



Funciones Trigonométricas: tangente

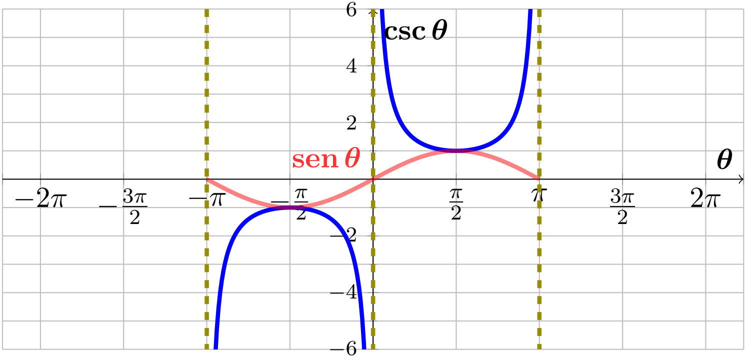
$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$



- Dominio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n+1)\pi}{2}\right\}$ con $n \in \mathbb{Z}$
- Imagen: $\mathbb{R}$
- Periodo: $p = \pi$
- Función impar: $\tan(-x) = -\tan(x)$

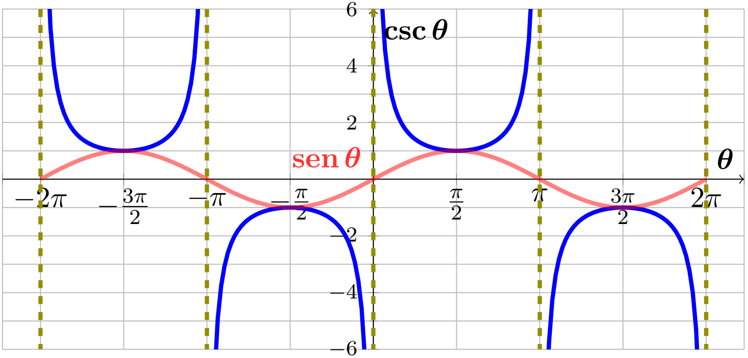
Otras Funciones Trigonométricas: Cosecante

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$



Otras Funciones Trigonométricas: Cosecante

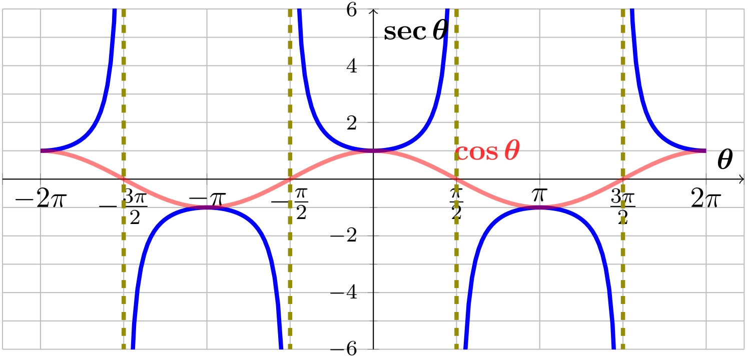
$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$



- Dominio: $\mathbb{R} - \{n\pi\}$ con $n \in \mathbb{Z}$
- Imagen: $\mathbb{R} - \{(-1, 1)\}$
- Periodo: $p = 2\pi$
- Función impar: $\csc(-x) = -\csc(x)$

Funciones trigonométricas: secante

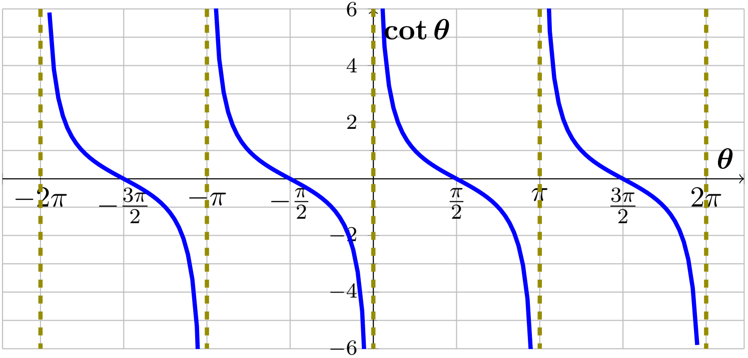
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$



- Dominio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n+1)\pi}{2}\right\}$ con $n \in \mathbb{Z}$
- Imagen: $\mathbb{R} - \{(-1, 1)\}$
- Periodo: $p = 2\pi$
- Función par: $\sec(-x) = \sec(x)$

Otras Funciones Trigonométricas: Cotangente

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$



- Dominio: $\mathbb{R} - \{n\pi\}$ con $n \in \mathbb{Z}$
- Imagen: $\mathbb{R}$
- Periodo: $p = \pi$
- Función impar: $\cot(-x) = -\cot(x)$

Funciones trigonométricas desplazadas

Definición: (Pág. 391 Stewart y col. (2016))

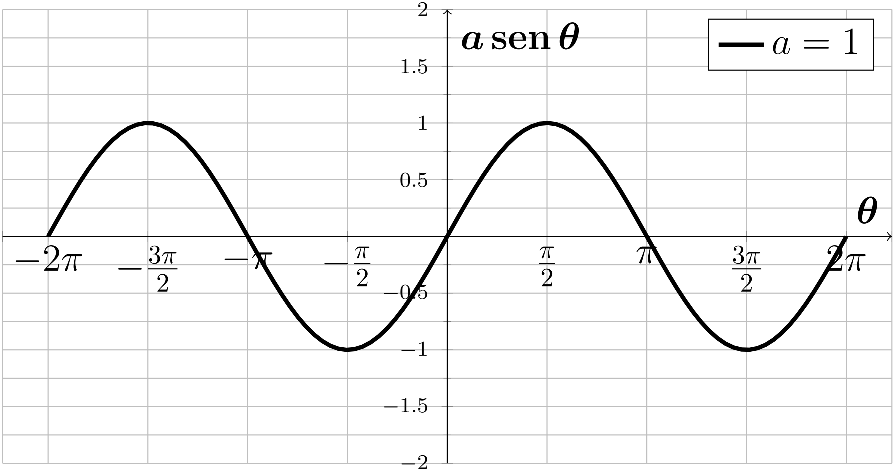
Forma generalizada de las funciones seno y coseno:

$$y = a\,\mathrm{sen}\left(k\left(\theta - b\right)\right) \quad \text{y} \quad y = a\cos\left(k\left(\theta - b\right)\right)$$

- Amplitud: $|a|$ con $a \in \mathbb{R}$.
- Frecuencia: $k \in \mathbb{R}^+$.
- Desfase: $b \in \mathbb{R}$.
- Periodo: $p = \dfrac{2\pi}{k}$.

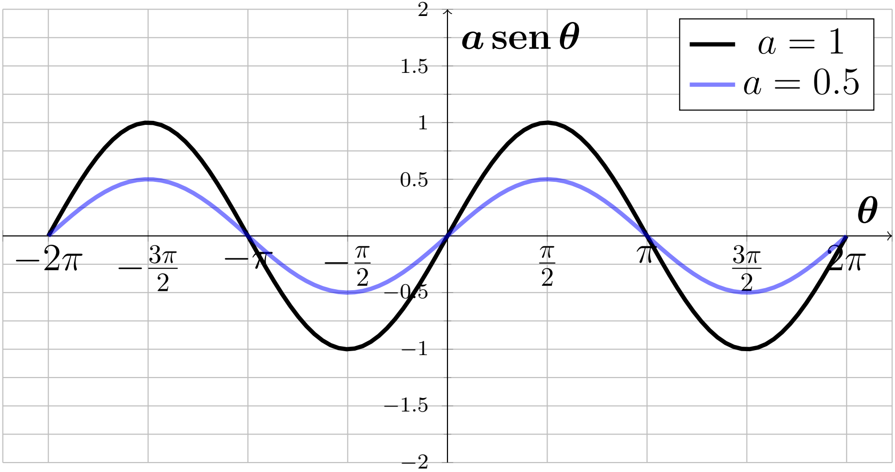
Funciones trigonométricas desplazadas

$$a\,\mathrm{sen}\,(\theta) \quad \rightarrow \quad k=1 \quad \text{y} \quad b=0.$$



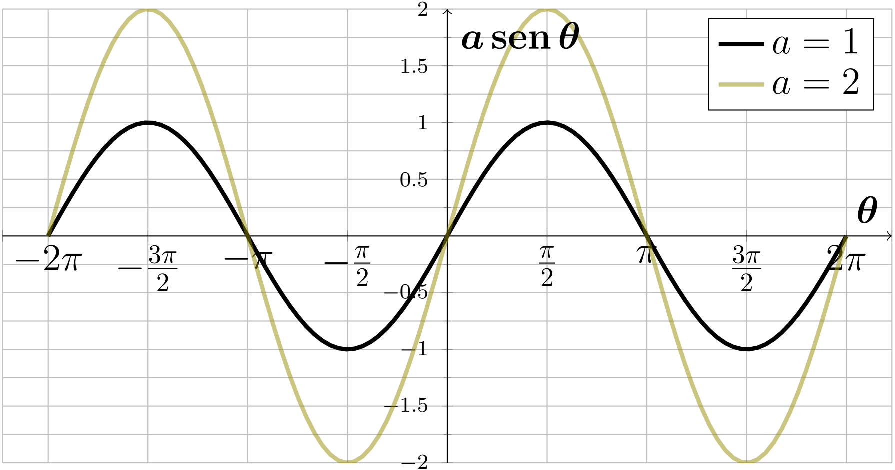
Funciones trigonométricas desplazadas

$$a\,\mathrm{sen}\,(\theta) \quad \to \quad k = 1 \quad \text{y} \quad b = 0.$$



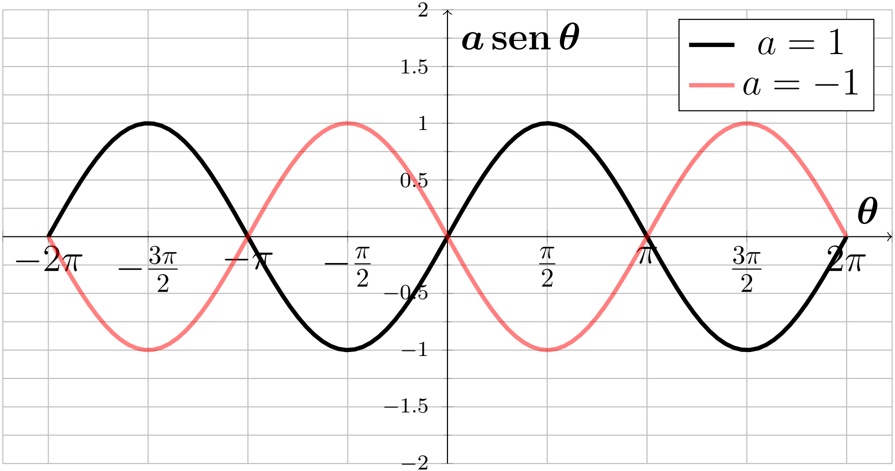
Funciones trigonométricas desplazadas

$$a\,\mathrm{sen}\,(\theta) \quad \rightarrow \quad k = 1 \quad \text{y} \quad b = 0.$$



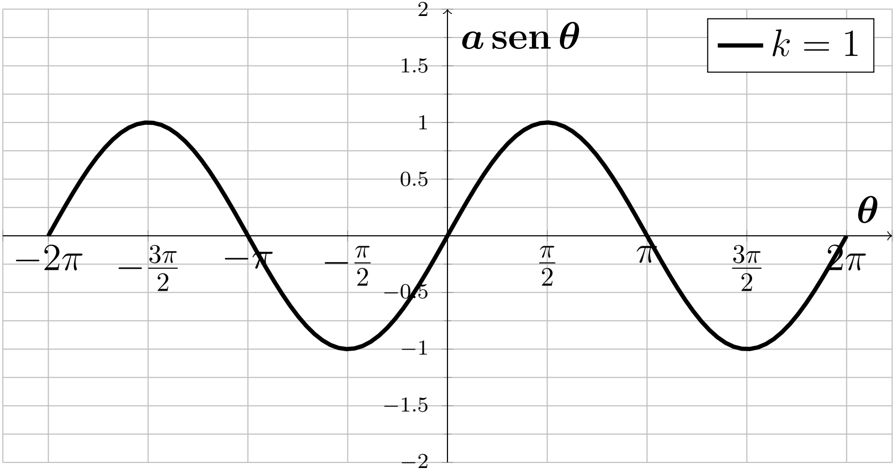
Funciones trigonométricas desplazadas

$$a\,\mathrm{sen}\,(\theta) \quad \rightarrow \quad k = 1 \quad \text{y} \quad b = 0.$$



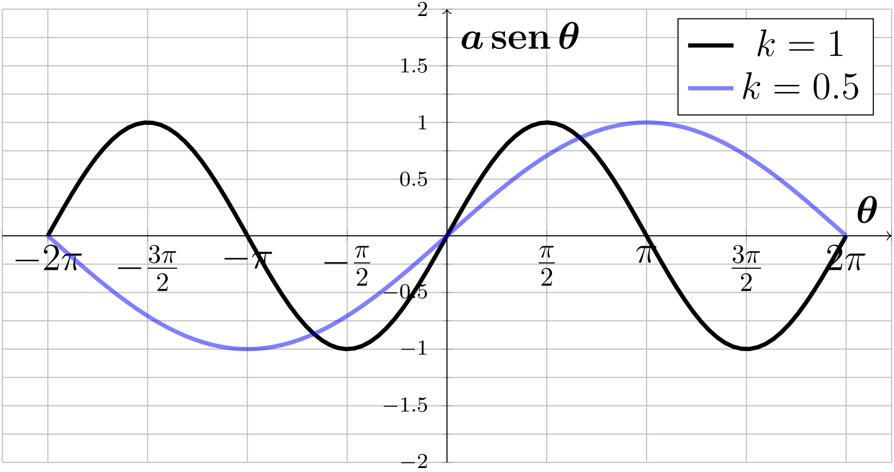
Frecuencia: modifica el periodo de la función $p = \dfrac{2\pi}{k}$.

$$\operatorname{sen}(k\theta) \quad \rightarrow \quad a = 1 \quad \text{y} \quad b = 0.$$



Frecuencia: modifica el periodo de la función $p = \dfrac{2\pi}{k}$.

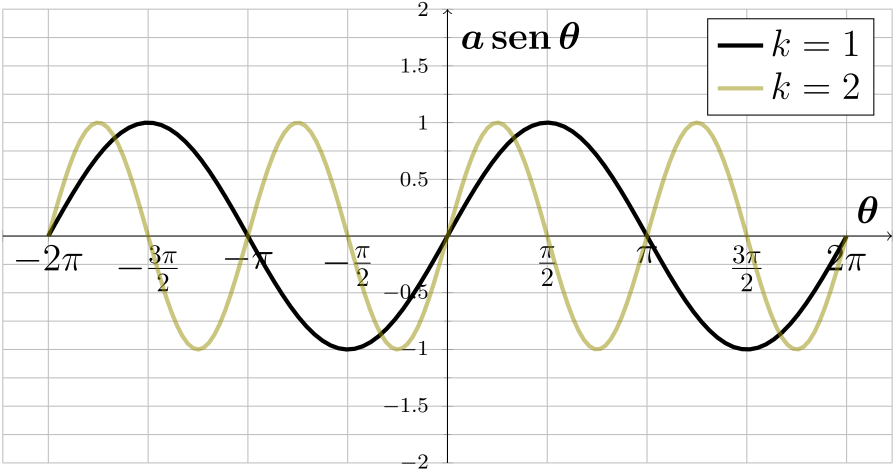
$$\operatorname{sen}(k\theta) \quad \rightarrow \quad a = 1 \quad \text{y} \quad b = 0.$$



Funciones trigonométricas desplazadas

Frecuencia: modifica el periodo de la función $p = \dfrac{2\pi}{k}$.

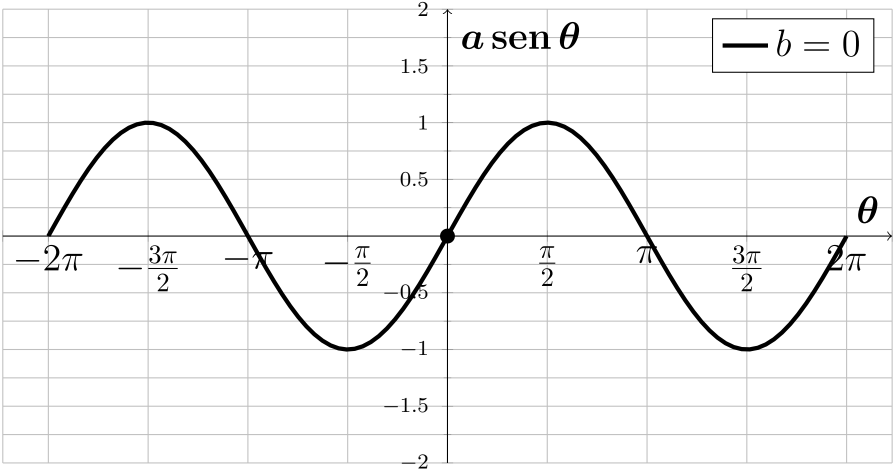
$$\operatorname{sen}(k\theta) \quad \rightarrow \quad a = 1 \quad \text{y} \quad b = 0.$$



Funciones trigonométricas desplazadas

Fase: desplaza la función hacia la izquierda o la derecha.

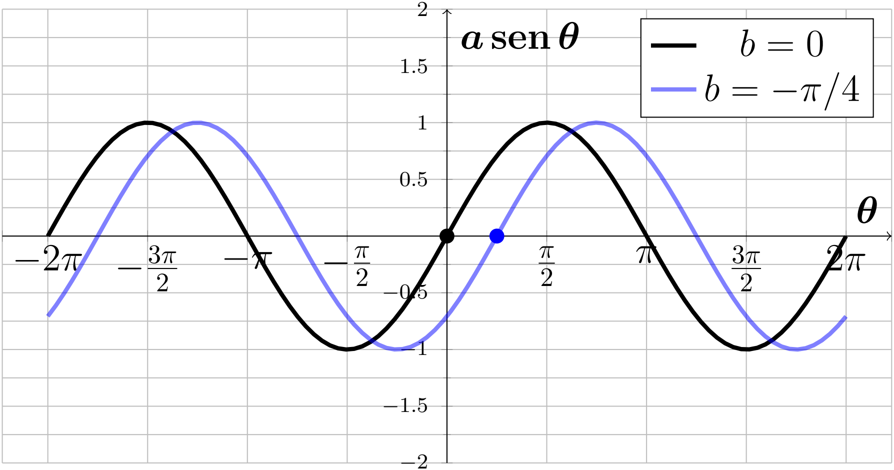
$$\operatorname{sen}(\theta + b) \quad \rightarrow \quad a = 1 \quad \text{y} \quad k = 1.$$



Funciones trigonométricas desplazadas

Fase: desplaza la función hacia la izquierda o la derecha.

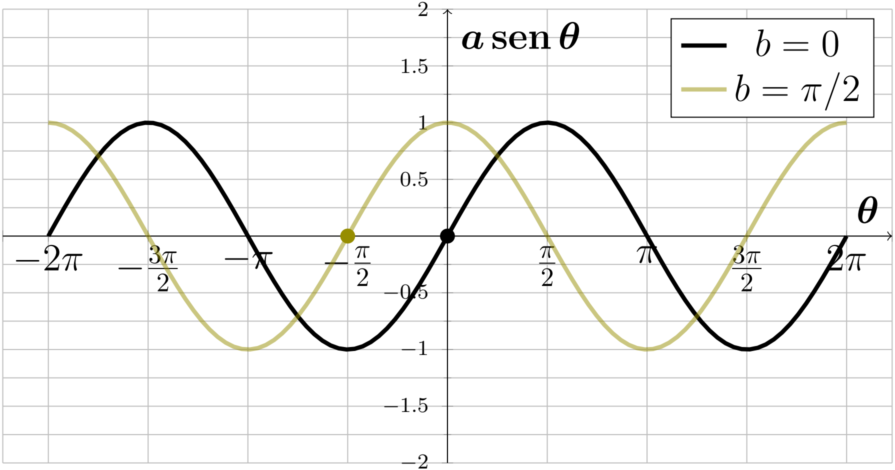
$$\operatorname{sen}(\theta + b) \quad \rightarrow \quad a = 1 \quad \text{y} \quad k = 1.$$



Funciones trigonométricas desplazadas

Fase: desplaza la función hacia la izquierda o la derecha.

$$\operatorname{sen}(\theta + b) \quad \rightarrow \quad a = 1 \quad \text{y} \quad k = 1.$$



Pasos para graficar funciones trigonométricas desplazadas:

$$y = a\,\mathrm{sen}\Big(k\,(\theta + b)\Big); \quad p = \frac{2\pi}{k}$$

1. Expresar la función trigonométrica en su forma generalizada.

Pasos para graficar funciones trigonométricas desplazadas:

$$y = a\,\mathrm{sen}\Big(k\,(\theta + b)\Big); \quad p = \frac{2\pi}{k}$$

1. Expresar la función trigonométrica en su forma generalizada.
2. Identificar el dominio, la amplitud ($|a|$), la frecuencia (k), la fase (b) y el periodo (p) de la función.

Pasos para graficar funciones trigonométricas desplazadas:

$$y = a\,\mathrm{sen}\Big(k\,(\theta + b)\Big); \quad p = \frac{2\pi}{k}$$

1. Expresar la función trigonométrica en su forma generalizada.
2. Identificar el dominio, la amplitud ($|a|$), la frecuencia (k), la fase (b) y el periodo (p) de la función.
3. Identificar la función base y graficarla en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, teniendo en cuenta la amplitud ($|a|$).

Funciones trigonométricas desplazadas

Pasos para graficar funciones trigonométricas desplazadas:

$$y = a \operatorname{sen}\Big(k\,(\theta + b)\Big); \quad p = \frac{2\pi}{k}$$

1. Expresar la función trigonométrica en su forma generalizada.
2. Identificar el dominio, la amplitud ($|a|$), la frecuencia (k), la fase (b) y el periodo (p) de la función.
3. Identificar la función base y graficarla en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, teniendo en cuenta la amplitud ($|a|$).
4. Dividir cada valor en el eje de las abscisas por la frecuencia (escalonamiento horizontal).

Funciones trigonométricas desplazadas

Pasos para graficar funciones trigonométricas desplazadas:

$$y = a\,\mathrm{sen}\Big(k\,(\theta + b)\Big); \quad p = \frac{2\pi}{k}$$

1. Expresar la función trigonométrica en su forma generalizada.
2. Identificar el dominio, la amplitud ($|a|$), la frecuencia (k), la fase (b) y el periodo (p) de la función.
3. Identificar la función base y graficarla en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, teniendo en cuenta la amplitud ($|a|$).
4. Dividir cada valor en el eje de las abscisas por la frecuencia (escalonamiento horizontal).
5. Sumar a cada valor en el eje de las abscisas el desfase (desplazamiento horizontal).

Pasos para graficar funciones trigonométricas desplazadas:

$$y = a \operatorname{sen}\Big(k\,(\theta + b)\Big); \quad p = \frac{2\pi}{k}$$

1. Expresar la función trigonométrica en su forma generalizada.
2. Identificar el dominio, la amplitud ($|a|$), la frecuencia (k), la fase (b) y el periodo (p) de la función.
3. Identificar la función base y graficarla en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, teniendo en cuenta la amplitud ($|a|$).
4. Dividir cada valor en el eje de las abscisas por la frecuencia (escalonamiento horizontal).
5. Sumar a cada valor en el eje de las abscisas el desfase (desplazamiento horizontal).
6. Sumar a cada valor en el eje de las ordenadas el desplazamiento vertical.

Funciones trigonométricas desplazadas

Pasos para graficar funciones trigonométricas desplazadas:

$$y = a\,\mathrm{sen}\Big(k\,(\theta + b)\Big); \quad p = \frac{2\pi}{k}$$

1. Expresar la función trigonométrica en su forma generalizada.
2. Identificar el dominio, la amplitud ($|a|$), la frecuencia (k), la fase (b) y el periodo (p) de la función.
3. Identificar la función base y graficarla en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, teniendo en cuenta la amplitud ($|a|$).
4. Dividir cada valor en el eje de las abscisas por la frecuencia (escalonamiento horizontal).
5. Sumar a cada valor en el eje de las abscisas el desfase (desplazamiento horizontal).
6. Sumar a cada valor en el eje de las ordenadas el desplazamiento vertical.
7. Reubicar los ejes coordenados en el origen.

Introducción
Funciones trigonométricas
Funciones trigonométricas desplazadas
Referencias

Ejemplo:

Realice la gráfica de la función:

$$y = 3\,\mathrm{sen}\,(2\theta + \pi/2)$$

A partir de la gráfica:

I. Encuentre su imagen.

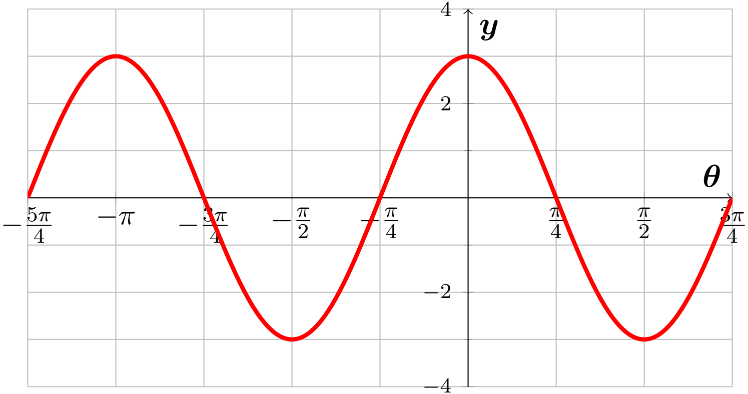
II. Encuentre los intervalos donde la función es positiva y donde es negativa.

III. Encuentre los intervalos donde la función crece y donde decrece.

Funciones trigonométricas desplazadas

Ejemplo:

$$y = 3\,\mathrm{sen}\left(2\left(\theta + \pi/4\right)\right)$$



Facultad de Ingeniería UNER

Ejercicio:

Realice la gráfica de la función:

$$y = \cos(4\theta) + 1$$

A partir de la gráfica:

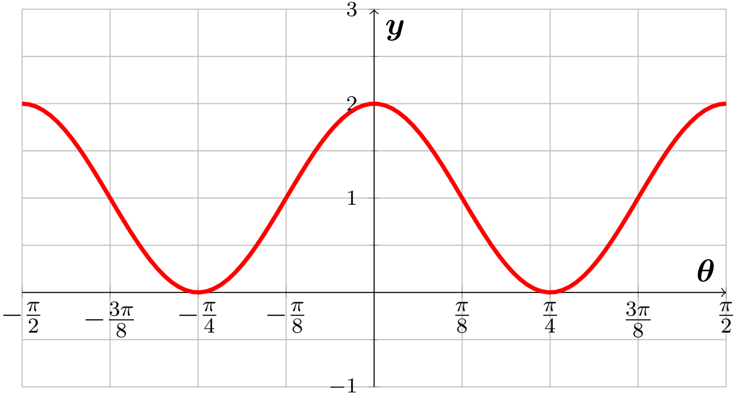
I. Encuentre su imagen.

II. Encuentre los intervalos donde la función es positiva y donde es negativa.

III. Encuentre los intervalos donde la función crece y donde decrece.

Ejercicio:

$$y = \cos(4\theta) + 1$$



Referencias

Stewart, J., Redlin, L., Watson, S., 2016. Precálculo. Matemática para el cálculo. Sexta edición. Cengage Learning.