Facultad de Ingeniería

Cálculo en una Variable

Bioingeniería
Licenciatura en Bioinformática
Ingeniería en Transporte

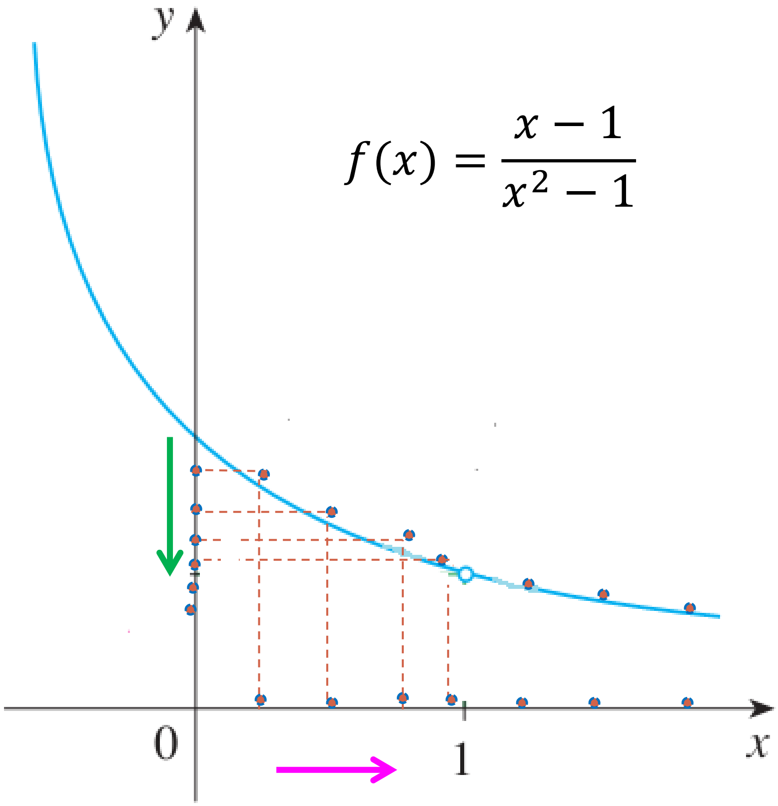
Tema: Límite

Sección 2.2 : Límite de una función

Límite

Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ veamos que ocurre con f cuando x se aproxima a 1

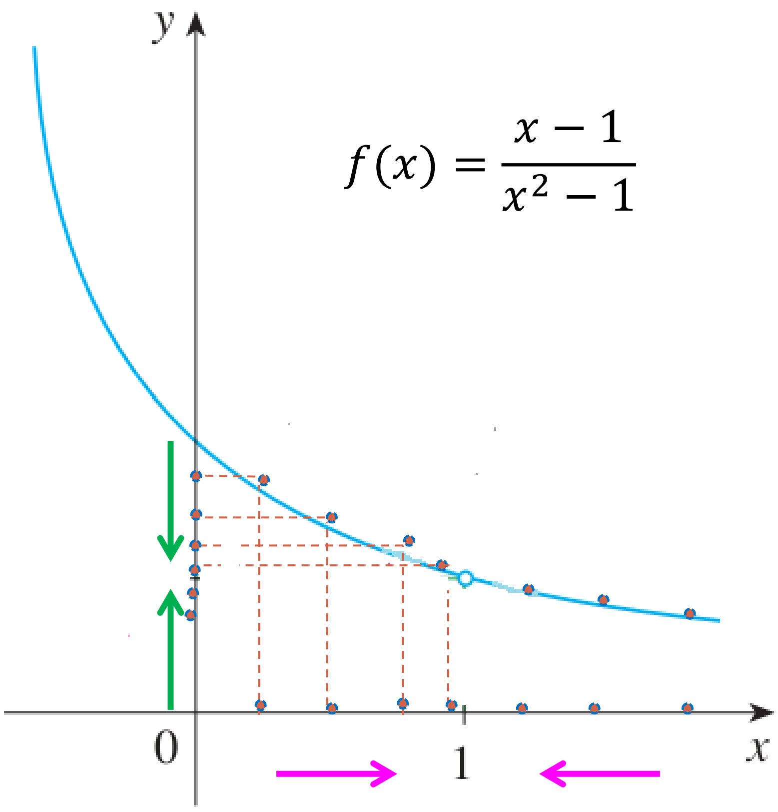
x	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025



Límite

Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ veamos que ocurre con f cuando x se aproxima a 1

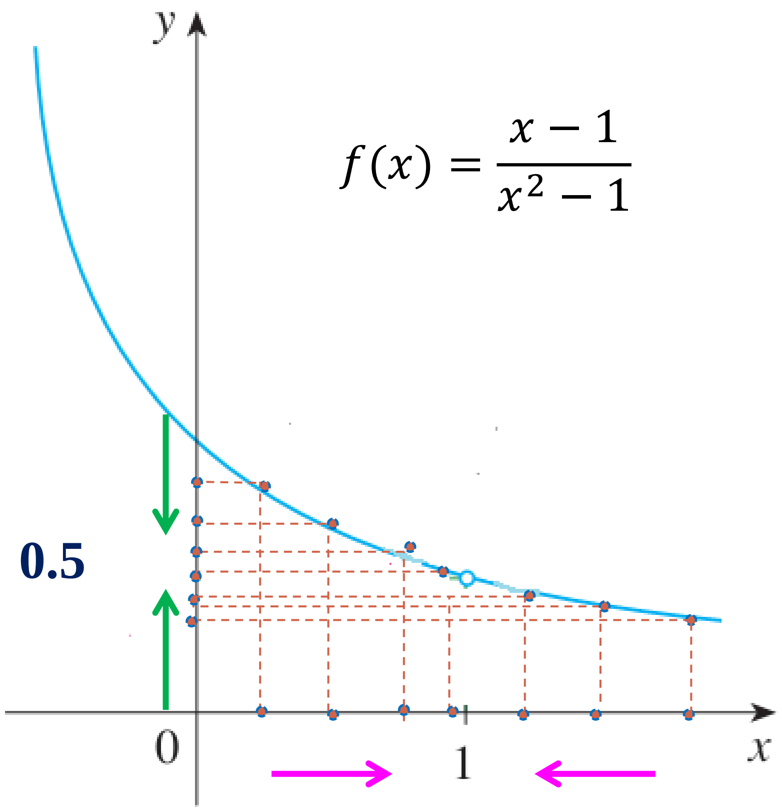
x	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025
1.0001	0.499975
1.001	0.499750
1.01	0.497512
1.1	0.476190
1.5	0.400000



Límite

Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ veamos que ocurre con f cuando x se aproxima a 1

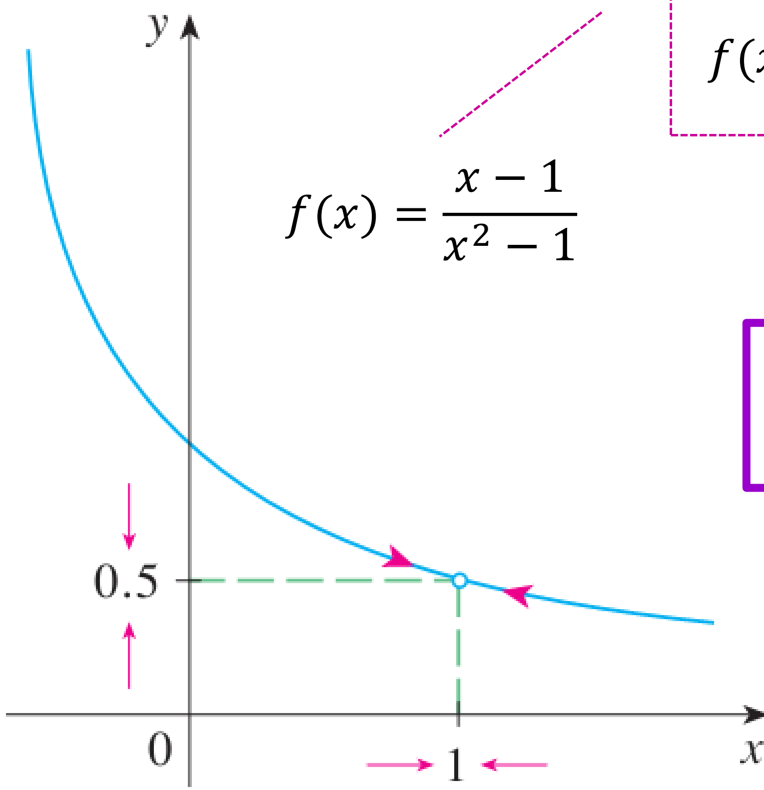
x	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025
↓	↓
1	?
↑	↑
1.0001	0.499975
1.001	0.499750
1.01	0.497512
1.1	0.476190
1.5	0.400000



$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5}$$

Límite

Entonces



$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{(x+1)},\ \mathrm{x}\neq 1$$

$$\boxed{Dom f=\mathbb{R}-\{-1,1\}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=0.5}$$

Observar que:

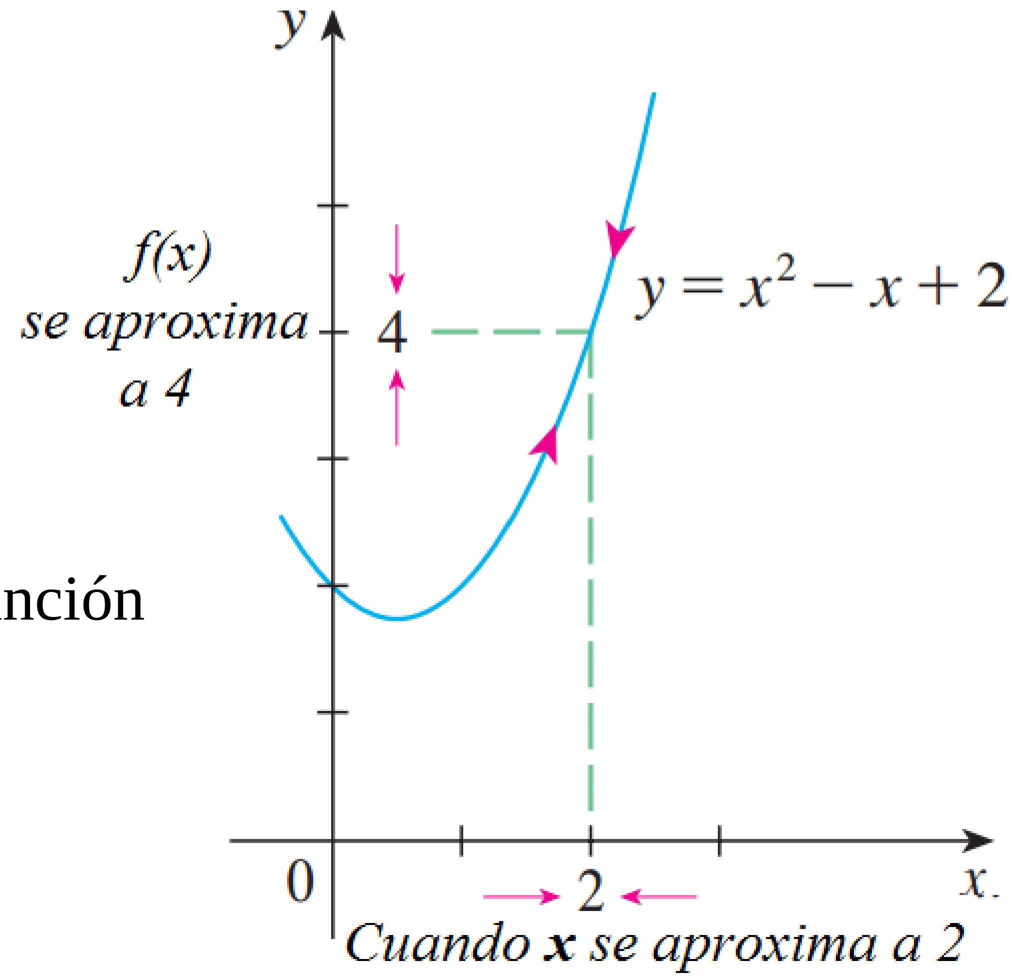
la función f **NO** está definida en 1 pero el $\boldsymbol{\lim_{x\to 1} f(x)}$ ***existe***

Límite

Por ejemplo:

Considero la función $f(x) = x^2 - x + 2$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$



Observar que, en este caso, la función está definida en 2 y $f(2) = 4$

Límite

1 Definición Supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a. (Esto significa que f está definida en algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a misma.) Entonces escribimos

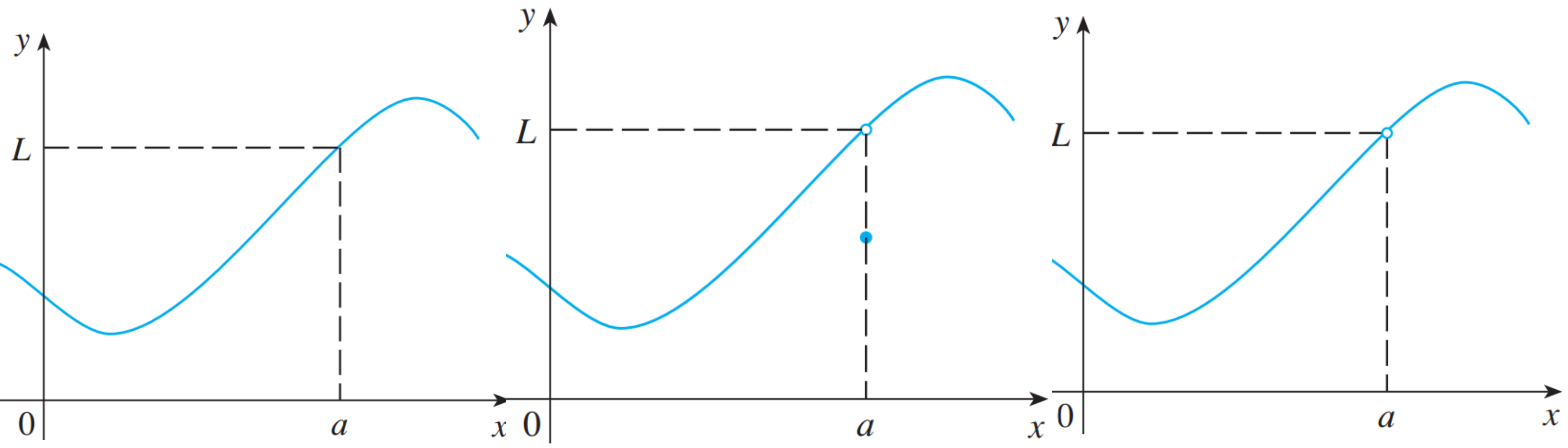
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos que "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L (tan cercanos a L como queramos), tomando valores de x suficientemente cerca de a (por ambos lados de a), pero no iguales a a.

Límite

Observando la gráfica de f.

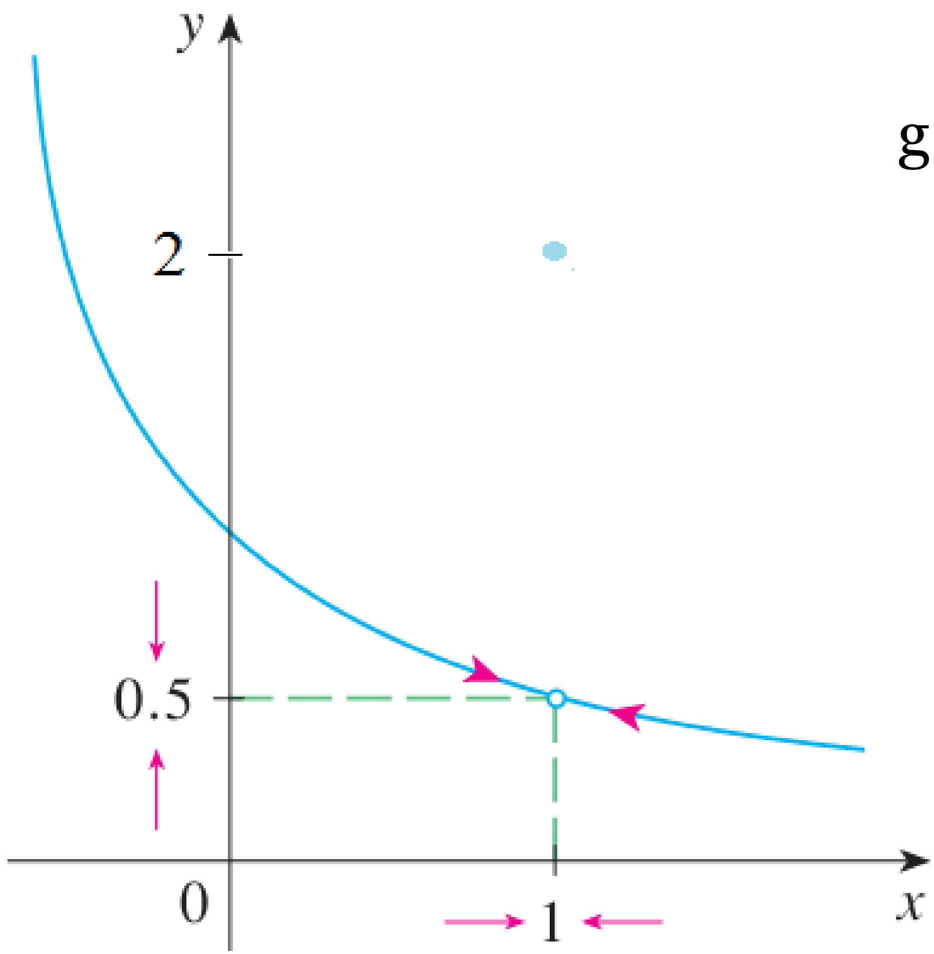


$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es ***independiente*** *de lo que ocurre en a,*

Límite

Consideremos la función



$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & , \quad x \neq 1 \\ 2 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

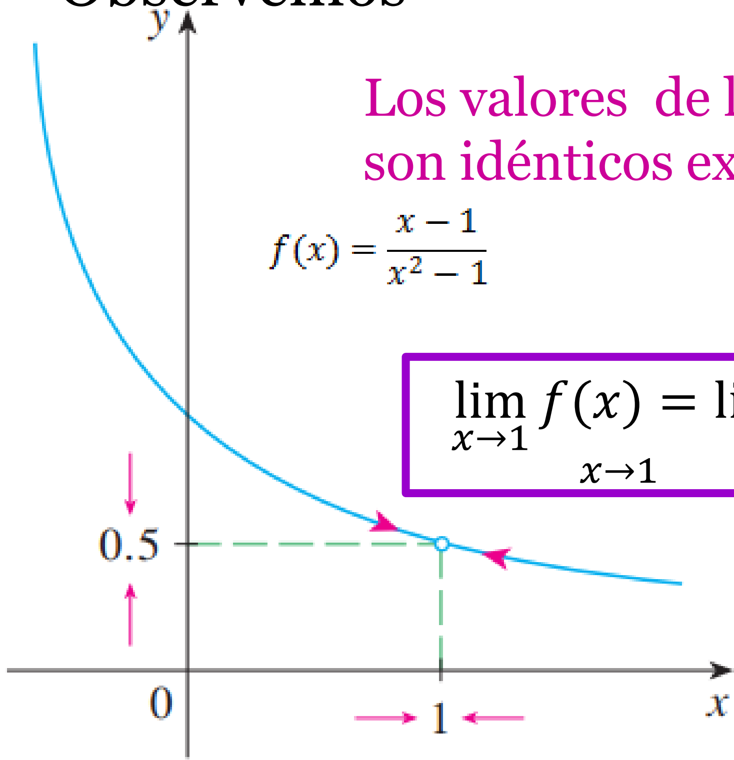
$$\boxed{\lim_{x \to 1} g(x) = 0.5}$$

Límite

Observemos

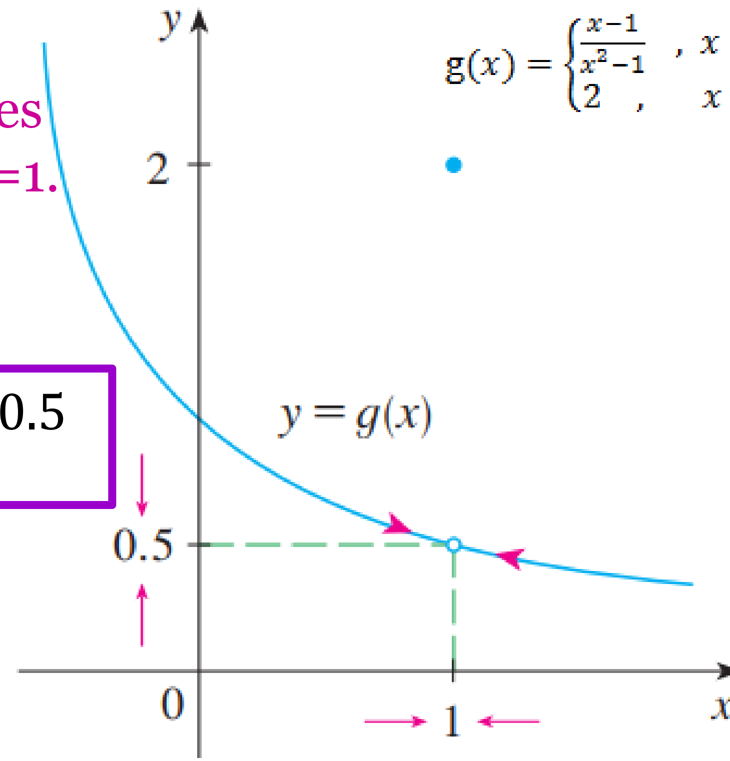
Los valores de las funciones son idénticos excepto en x=1.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$$



$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = 0.5$$

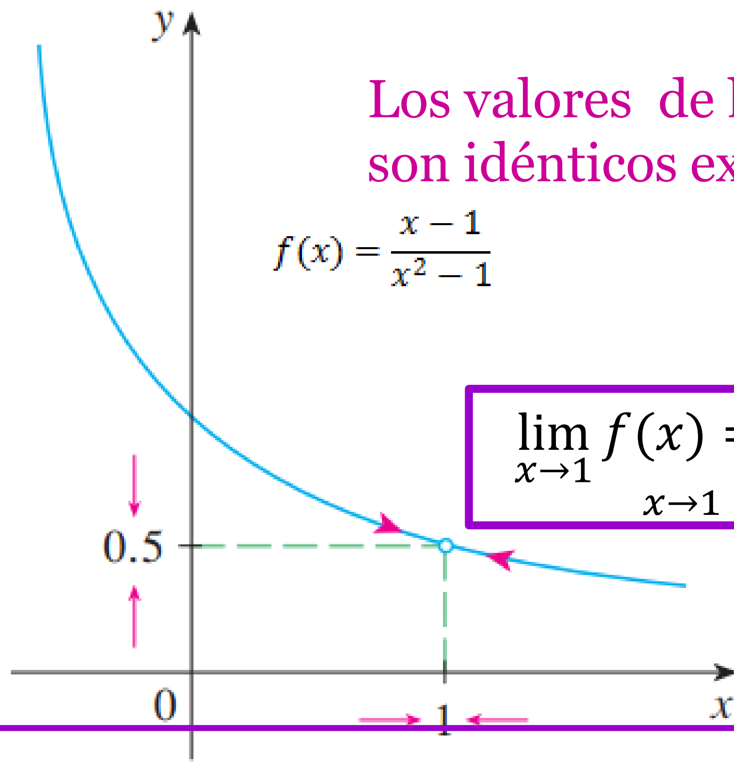
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & , \; x \neq 1 \\ 2 & , \; x = 1 \end{cases}$$



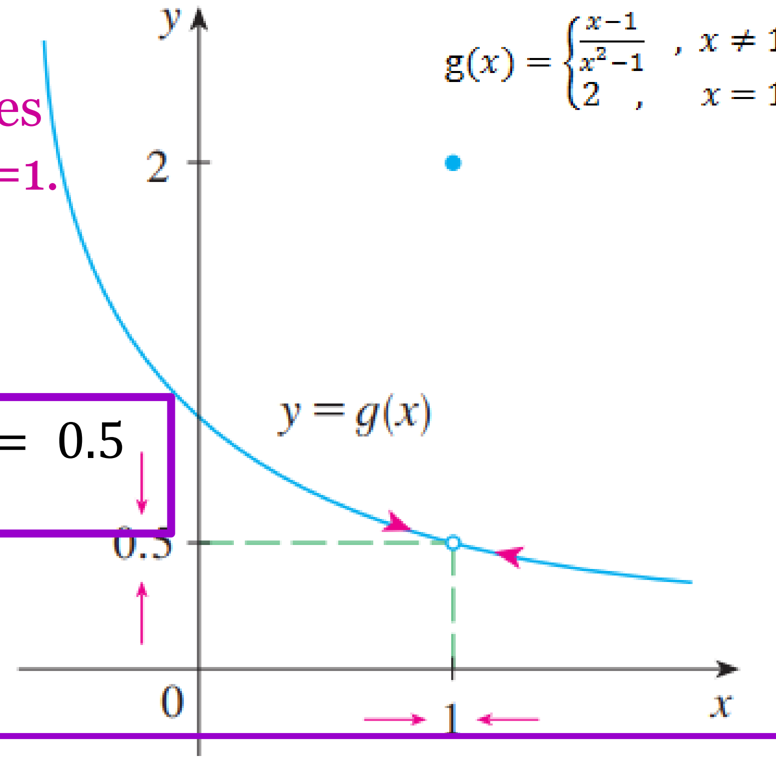
Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq a$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$ siempre que el límite exista.

Límite

Los valores de las funciones son idénticos excepto en x=1.



$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 0.5}$$



Teorema:

Sea a un número real y $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$ en un intervalo abierto que contiene a a. Si ***existe*** el límite de $g(x)$ cuando x se aproxima a a, entonces ***existe*** el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a y

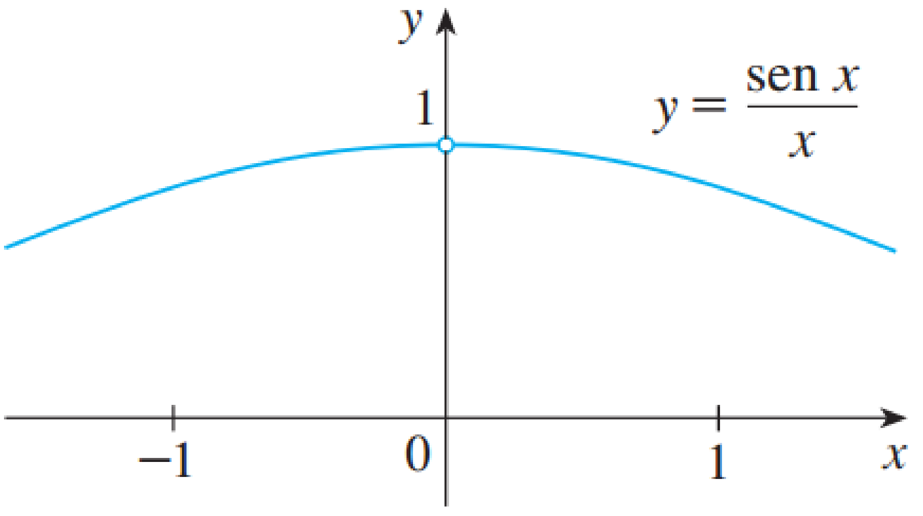
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Tabla de valores

Límite

Ejemplo : $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} =$

x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983



$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$$

¿ Puedo confiar en una tabla de valores?

Límite

Ejemplo

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\frac{1}{6}$$

√

y si continuamos …

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=0$$

Error

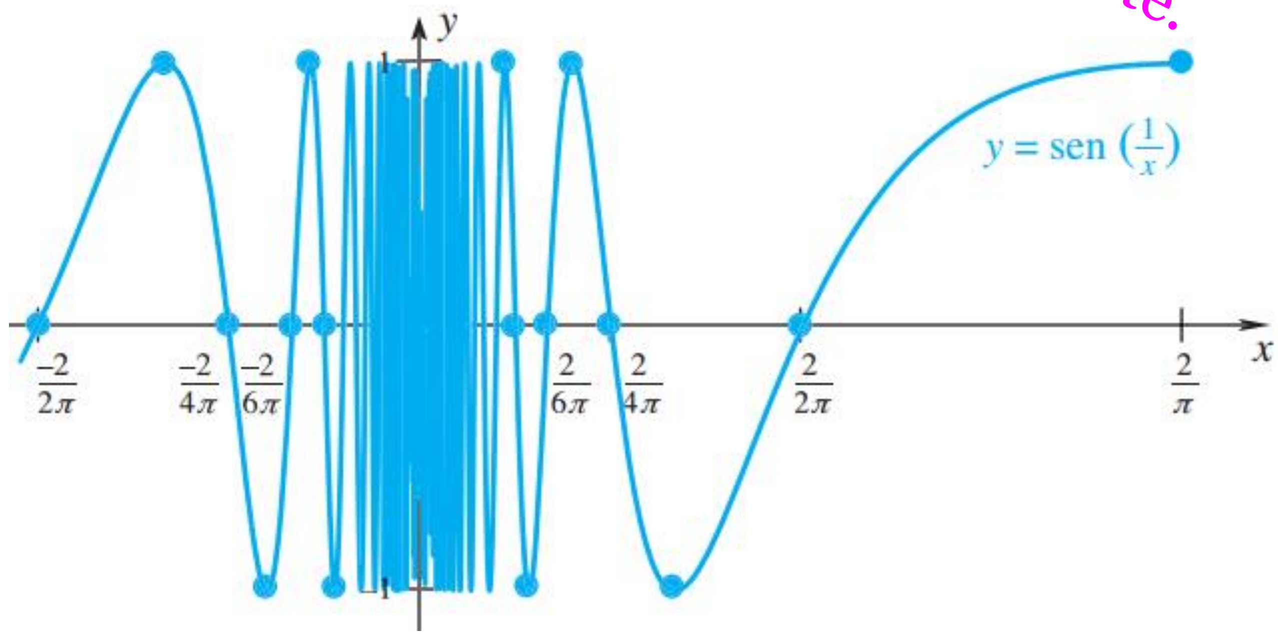
calculadora dio valores falsos

Ejemplo

Error al conjeturar el valor del límite.

x	$\operatorname{sen}\frac{1}{x}$
$2/\pi$	1
$2/(2\pi)$	0
$2/(3\pi)$	-1
$2/(4\pi)$	0
$2/(5\pi)$	1
$2/(6\pi)$	0
$2/(7\pi)$	-1
$2/(8\pi)$	0
$2/(9\pi)$	1
$2/(10\pi)$	0
$2/(11\pi)$	-1
$2/(12\pi)$	0
$\downarrow$	$\downarrow$
0	?

$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right) =$$



$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$$ **No existe**

Límite

Ejemplo

Calcular $\lim_{x \to 0} \left[x^2 - \frac{\cos\ x}{10000} \right] =$

Construimos una tabla y en ella observar que:

x	$x^2 - \frac{\cos x}{10{,}000}$
$\pm$ 1	0.99995
$\pm$ 0.5	0.24991
$\pm$ 0.1	0.00990
$\pm$ 0.01	0.000000005
$\downarrow$	$\downarrow$
0	?

Error

Error al conjeturar el valor del límite.

$\pm$ 0.001	$-$ 0.00009899
$\pm$ 0.0001	$-$ 0.000099899

pero

$$\lim_{x \to 0} \left[x^2 - \frac{\cos\ x}{10000} \right] = -\frac{1}{10000}$$

Límites laterales

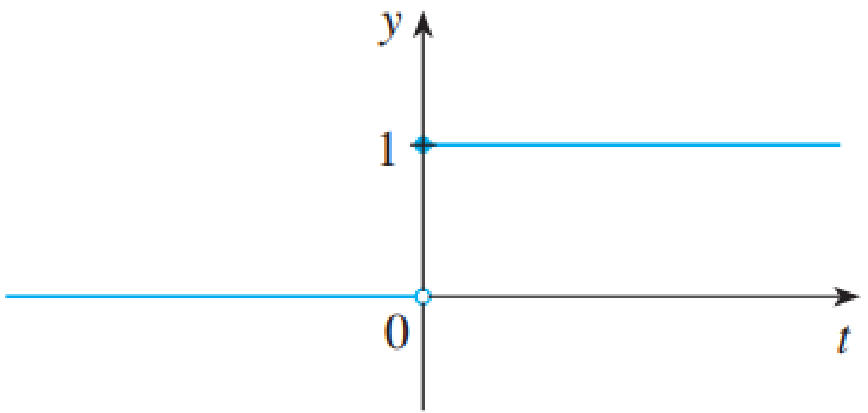
Límite Laterales

Función Heaviside H

$$\mathrm{H}(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & . \ t \geq 0 \end{cases}$$

Calcular:

$$\lim_{t \to 0} H(t) =$$



La función de Heaviside

Cuando t se aproxima a 0 por izquierda, H(t) se aproxima 0.

$$\lim_{\boxed{t \to 0^-}} H(t) = 0$$

Cuando t se aproxima a 0 por derecha, H(t) se aproxima 1.

$$\lim_{\boxed{t \to 0^+}} H(t) = 1$$

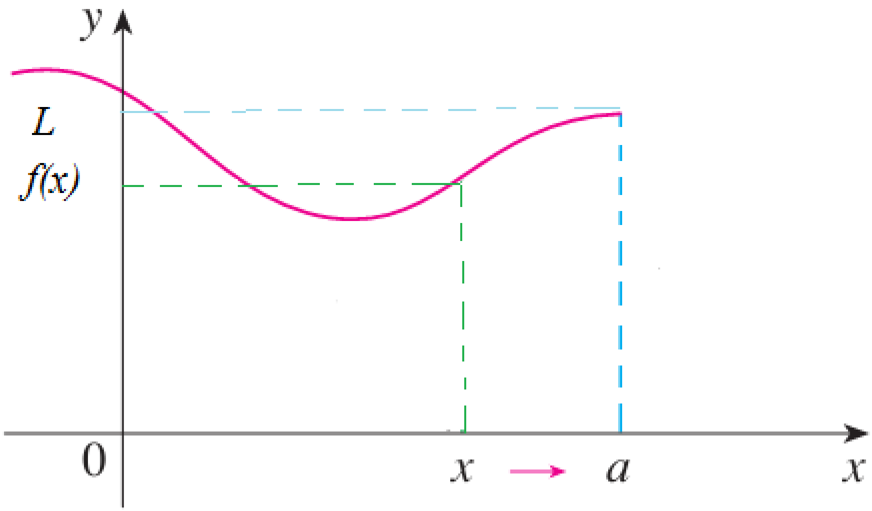
Entonces

$$\lim_{t \to 0} H(t) =$$

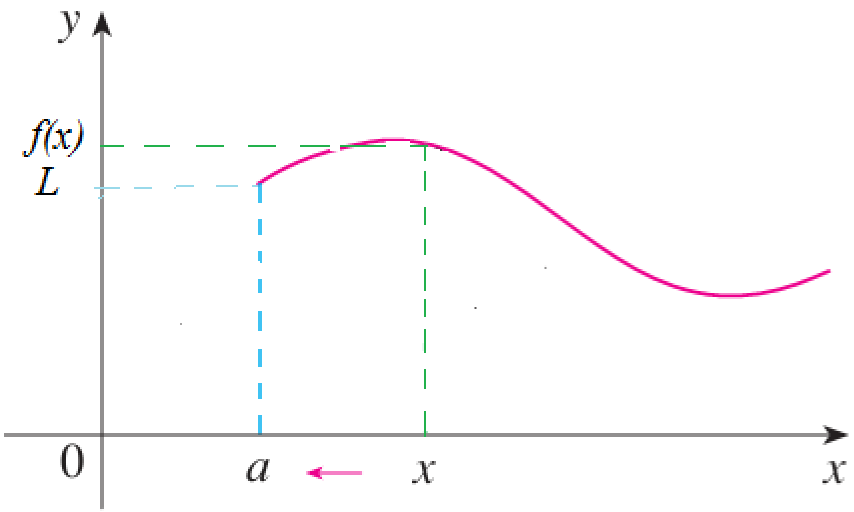
No existe

Limites laterales

Límite lateral izquierdo ***Límite lateral derecho***



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Entonces

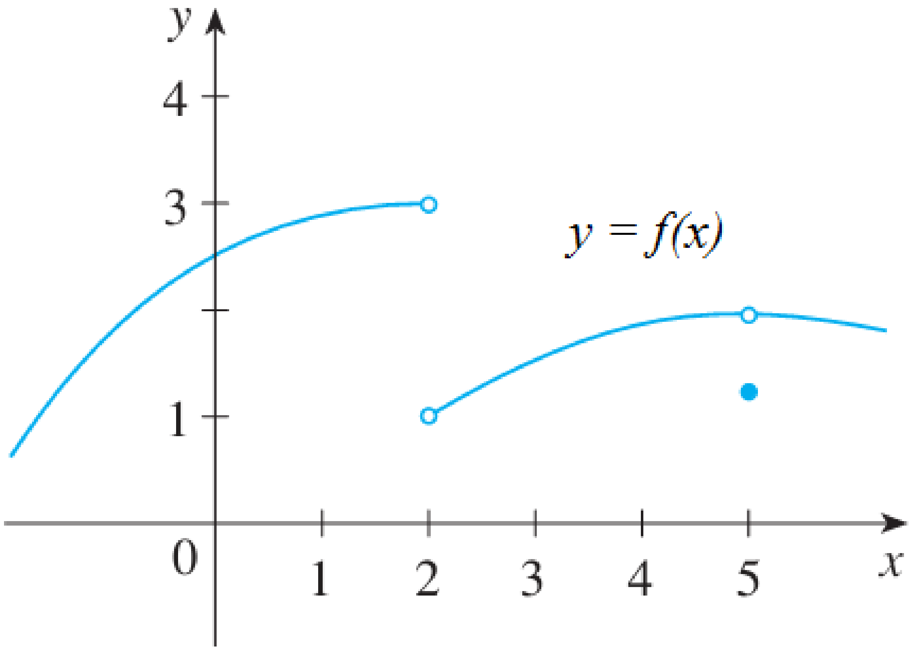
$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \quad si\ ysólo\ si \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L}$$

Ejemplo

Limites laterales

Ejemplo

Observando la gráfica de la función f, calcular los siguientes límites.



$$\lim_{x \to 0} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) =$$

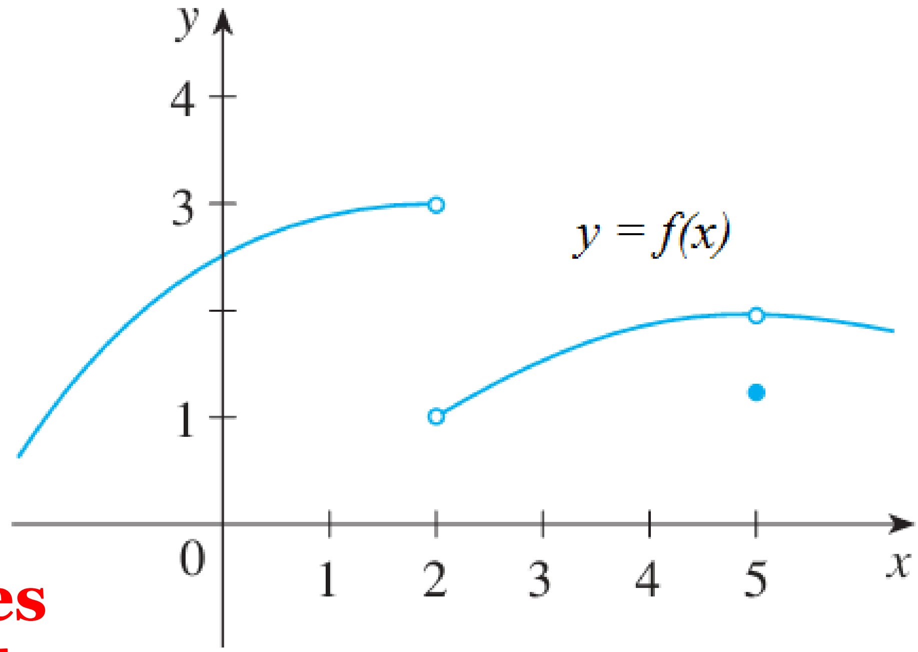
$$\lim_{x \to 5^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) =$$

Limites laterales

Ejemplo

Observando la gráfica de la función f, calcular los siguientes límites.



$$\lim_{x\to 0} f(x) = \mathbf{2,5}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \mathbf{3}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \mathbf{1}$$

Límites laterales distintos

$$\lim_{x\to 2} f(x) =$$ **No existe**

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \mathbf{2}$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \mathbf{2}$$

Límites laterales iguales

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \mathbf{2}$$

Limites laterales

Ejemplo

Observando la gráfica de la función f, calcular los siguientes límites.

$\lim_{x\to -3} f(x) =$

$\lim_{x\to 0} f(x) =$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) =$

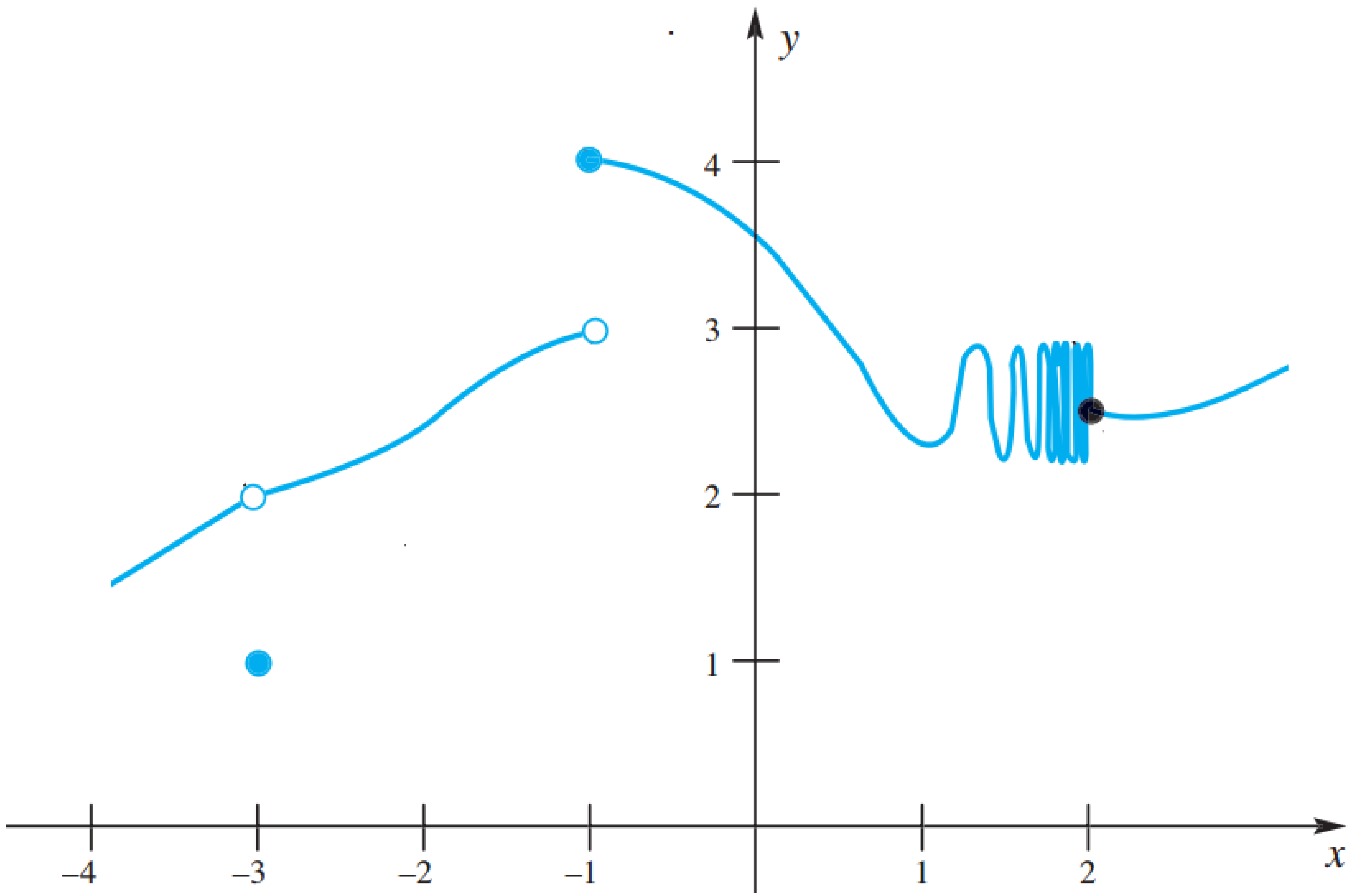
$\lim_{x\to -1^+} f(x) =$

$\lim_{x\to -1} f(x) =$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$

$\lim_{x\to 2} f(x) =$



Limites laterales

Ejemplo

Observando la gráfica de la función f, calcular los siguientes límites.

$\lim_{x\to -3} f(x) =$ 2

$\lim_{x\to 0} f(x) =$ 3,5

$\lim_{x\to -1^-} f(x) =$ 3

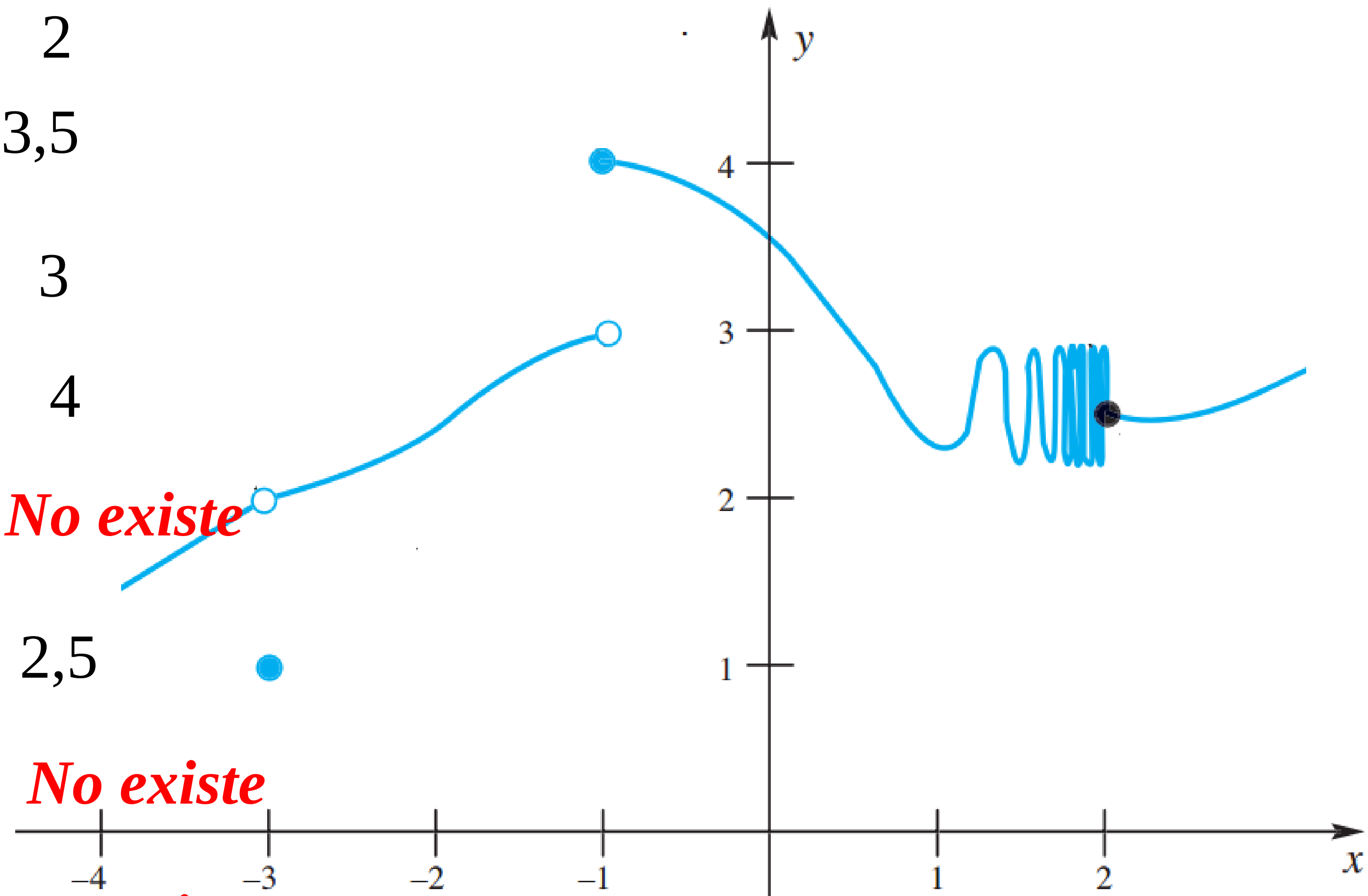
$\lim_{x\to -1^+} f(x) =$ 4

$\lim_{x\to -1} f(x) =$ ***No existe***

$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ 2,5

$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$ ***No existe***

$\lim_{x\to 2} f(x) =$ ***No existe***



Límite

¿Cómo calculamos los límites?

Leyes de los límites

Leyes de Límites

Suponga que *c* es una constante y que existen los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

Entonces

1) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ **Límite de una suma**

2) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$ **Límite de una diferencia**

3) $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$ **Límite de un múltiplo constante**

4) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)].[\lim_{x\to a} g(x)]$ **Límite de un producto**

5) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad si \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ **Límite de un cociente**

Ejemplo

Leyes de Límites

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$ *Límite de una suma*

$$\lim_{x\to a}[cf(x)]=c\lim_{x\to a}f(x)$$ *Límite de un múltiplo constante*

Ejemplo

Si $\lim_{x\to 1} f(x) = 8$ y $\lim_{x\to 1} g(x) = -2$.

a) $\lim_{x\to 1}[-2f(x)+g(x)] =$

Solución

a) $\lim_{x\to 1}[-2f(x)+g(x)] = \lim_{x\to 1}[-2f(x)] + \lim_{x\to 1}[g(x)] =$

Límite de una suma

Límite de un múltiplo constante

$$= -2\lim_{x\to 1}[f(x)] + \lim_{x\to 1}[g(x)] =$$

$$= -2\,(8) + (-2) = -18$$

Leyes de Límites

$$\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad si \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Límite de un cociente

Ejemplo

Si $\lim_{x \to 1} f(x) = 8$ y $\lim_{x \to 1} g(x) = -2$.

b) $\lim_{x \to 1}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] =$

Solución

Límite de un cociente

$$\text{b) } \lim_{x \to 1}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to 1} f(x)}{\lim_{x \to 1} g(x)}$$

$$= \frac{8}{-2}$$

Leyes de Límites

Suponga que c es una constante y que existen los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

Entonces

$$6)\ \lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n, \textit{ donde n es un entero positivo}$$

Límite de una potencia

$$7)\ \lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}, \textit{ donde n es un entero positivo}$$

$$[\textit{Si n es par suponemos} \lim_{x\to a} f(x) > 0]$$

Límite de una raíz

Leyes de Límites

$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)].[\lim_{x\to a} g(x)]$ **Límite de un producto**

$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$, *donde n es un entero positivo* **Límite de una potencia**

$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, *donde n es un entero positivo*
[*Si n es par suponemos* $\lim f(x) > 0$] **Límite de una raíz**

Ejemplo

Si $\lim_{x\to 1} f(x) = 8$ y $\lim_{x\to 1} g(x) = -2$.

c) $\lim_{x\to 1}[\sqrt[3]{f(x)}\,(g(x))^4] =$

Solución

Límite de un producto

c) $\lim_{x\to 1}[\sqrt[3]{f(x)}\,(g(x))^4] = \lim_{x\to 1}[\sqrt[3]{f(x)}\,]\lim_{x\to 1}[\,(g(x))^4] =$

Límite de una potencia

Límite de una raíz

$$= \sqrt[3]{\lim_{x\to 1} f(x)}.\left(\lim_{x\to 1} g(x)\right)^2$$

$$= \sqrt[3]{8}.(-2)^2 = 8$$

Algunos límites especiales

Surgen de las reglas

1) $\lim\limits_{x\to a}[c] = c$

2) $\lim\limits_{x\to a} x = a$

3) $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, *donde n es un entero positivo*

4) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, *donde n es un entero positivo y* $a > 0$.

Ejemplo

Límite

Ejemplo:

Calcular.

$$\lim_{x \to -2} [2x^3 - 3x + 1] =$$

Solución:

Límite de una suma

$$\lim_{x \to -2} [2x^3 - 3x + 1] = \lim_{x \to -2} [2x^3] - \lim_{x \to -2} [3x] + \lim_{x \to -2} [1]$$

Límite de un múltiplo constante

$$= 2 \lim_{x \to -2} [x^3] - 3 \lim_{x \to -2} [x] + \lim_{x \to -2} [1]$$

Límite de constante

Límite de una potencia

$$= 2(-2)^3 - 3(-2) + 1$$

Límite por Sustitución directa

Ejemplo:

Calcular.

$$\lim_{x\to -2}[2x^3 - 3x + 1] =$$

Solución:

$$\lim_{x\to -2}[2x^3 - 3x + 1] = \quad 2(-2)^3 - 3(-2) + 1 = -9$$

Sustitución directa

Límite por sustitución directa

Sustitución directa

- Si p es una función polinomial y a un número real , entonces

$$\boxed{\lim_{x \to a} p(x) = p(a)}$$

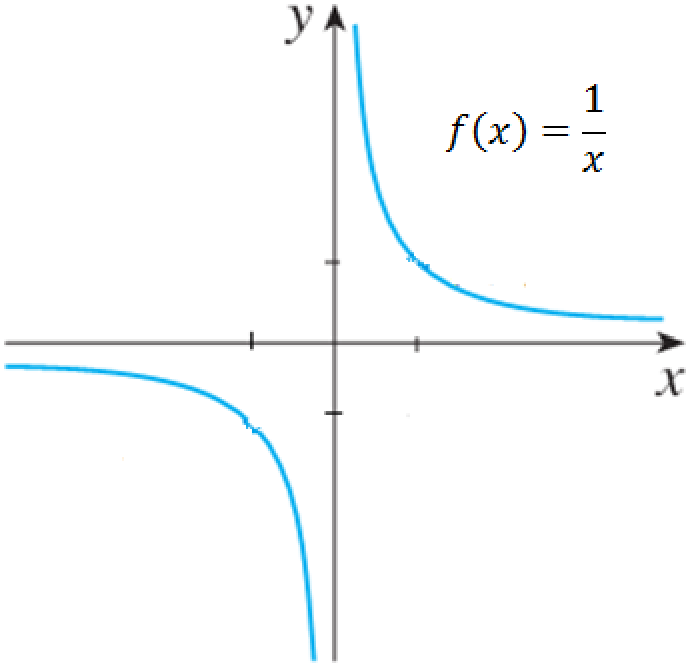
- Si r es una función racional dada por $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ y a está en el dominio de r, es decir, $\underline{q(a) \neq 0}$,entonces :

$$\boxed{\lim_{x \to a} r(x) = r(a) = \frac{p(a)}{q(a)}}$$

Límite infinitos

Límite infinitos

Recordemos



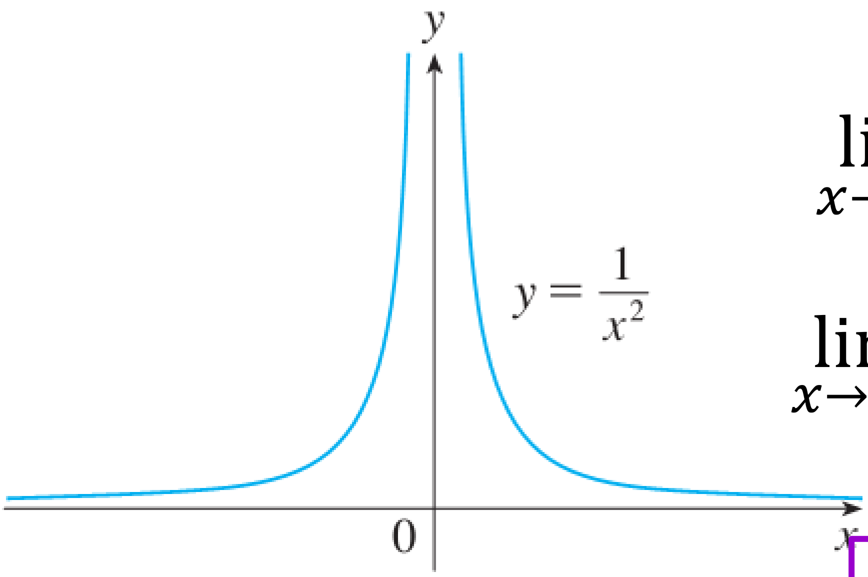
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Los límites laterales ***no existen*** , indican, por ejemplo que :
¨ $^1/_x$ ***puede hacerse tan grande como queramos, tomando x valores mayores y cercanos a 0*** ¨

Límite infinitos

Recordemos



$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} &= +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} &= +\infty \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto expresa que el límite ***no existe*** , indica que :
¨ $1/_{x^2}$ *puede hacerse tan grande como queramos, tomando a x suficientemente cerca de 0* ¨

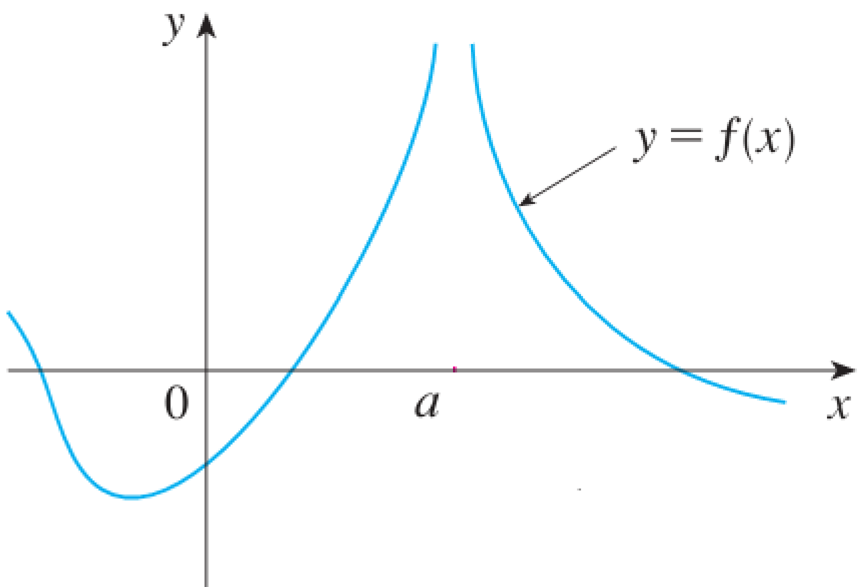
Límite infinitos

Definición

Sea *f* una función definida por ambos lados de *a*, excepto posiblemente en la misma *a*. Entonces

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \infty}$$

Significa que los valores de *f(x)* pueden ser arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos), al tomar *x* suficientemente cerca de *a*, pero no igual a *a*.



Se lee:

" el límite de *f(x)*, cuando *x* tiende a *a* es infinito "

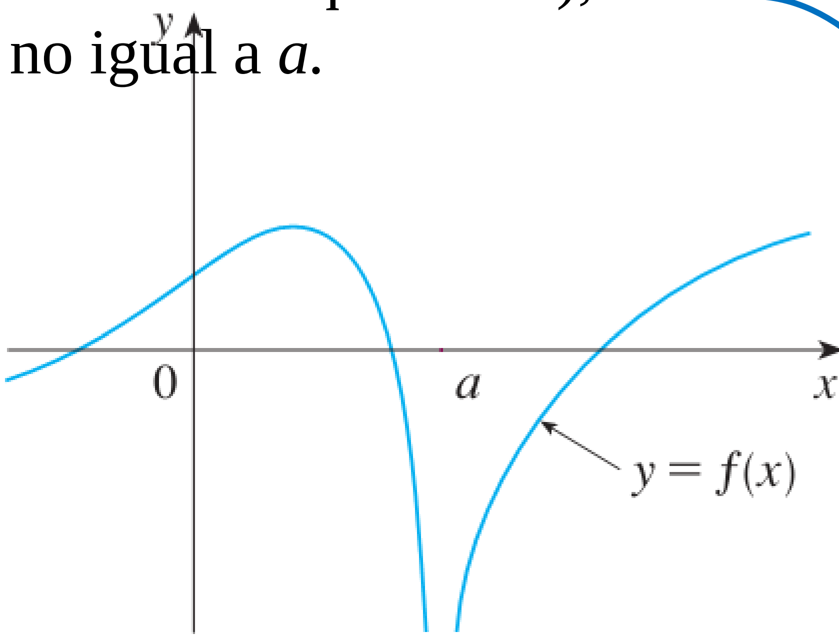
Límite infinitos

Definición límite infinito

Sea *f* una función definida por ambos lados de *a*, excepto posiblemente en la misma *a*. Entonces

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty}$$

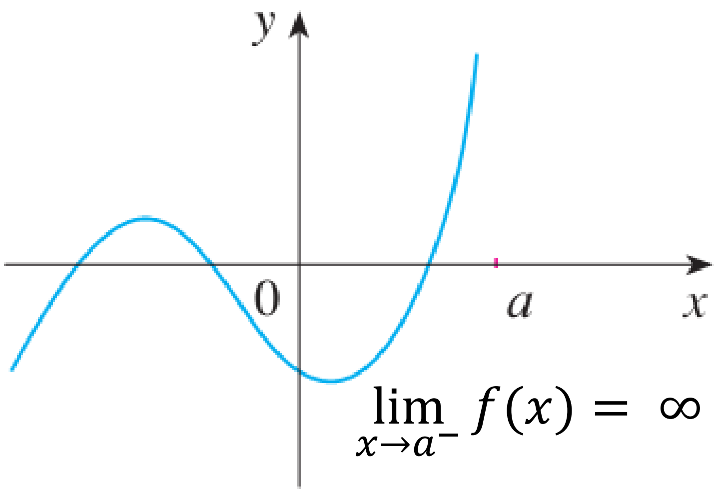
Significa que los valores de *f(x)* pueden ser negativos arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos), al tomar *x* suficientemente cerca de *a*, pero no igual a *a*.



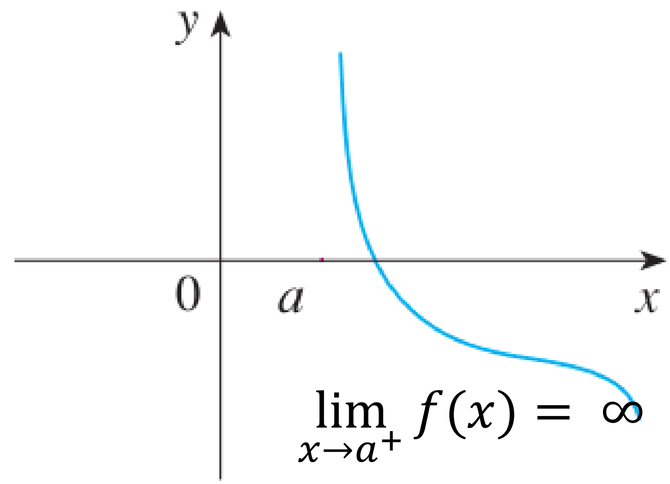
Se lee:
¨ el límite de *f(x)*, cuando *x* tiende a *a*, es menos infinito ¨

Límite infinitos

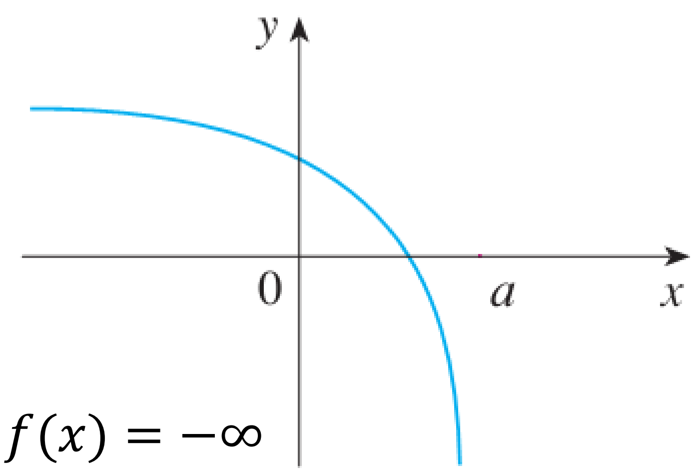
Cuatro casos de límites laterales infinitos



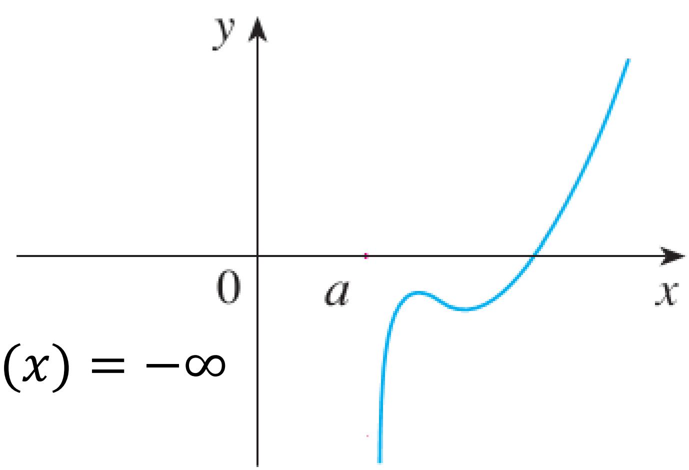
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$



$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$



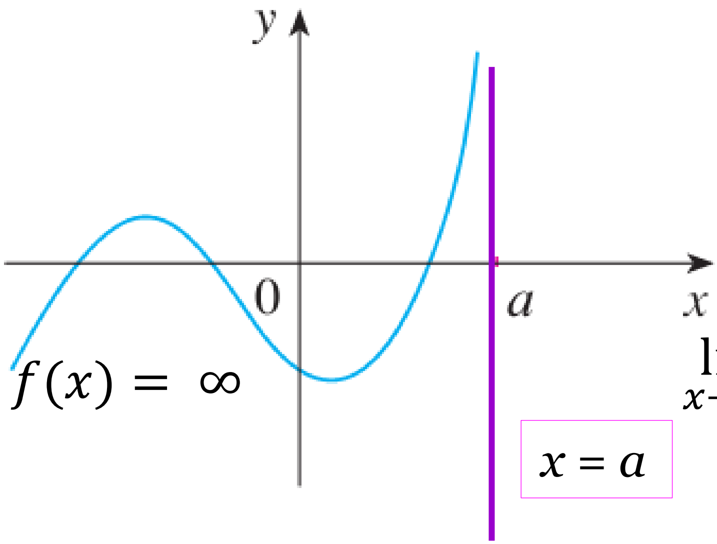
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$



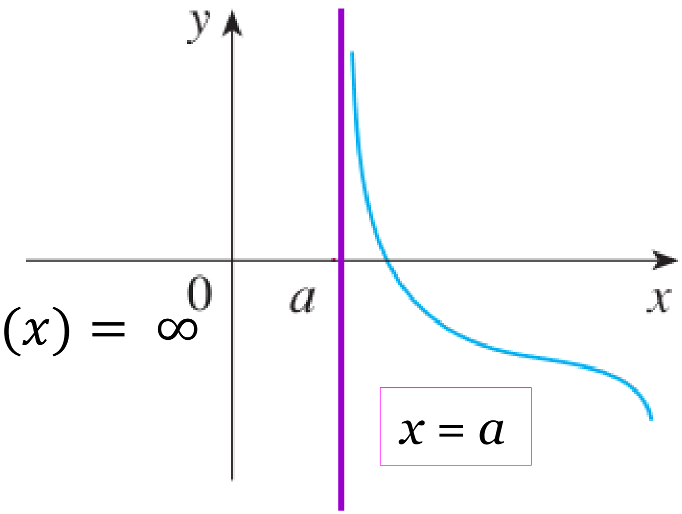
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

Asíntotas verticales

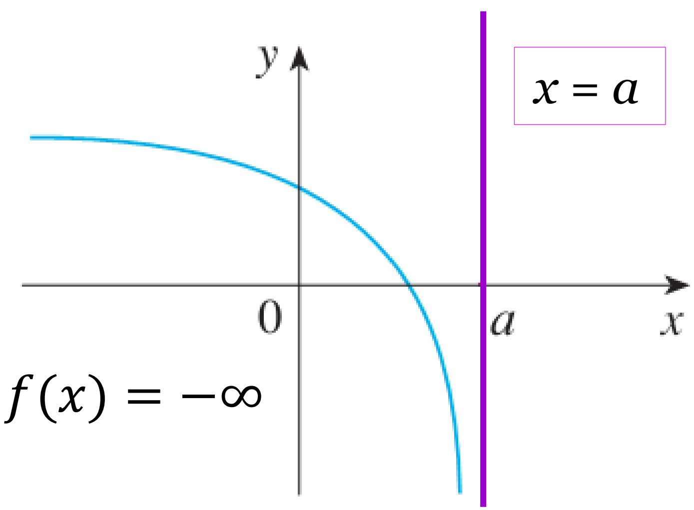
Observemos los límites infinitos geométricamente



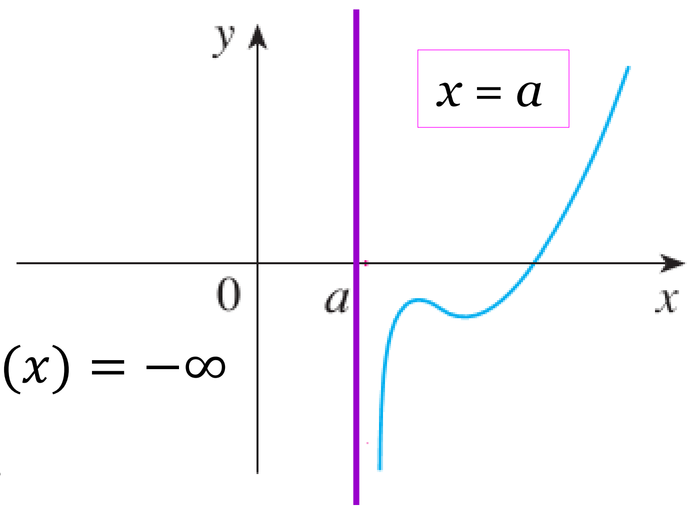
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

riable

Límite infinitos - Asíntotas verticales

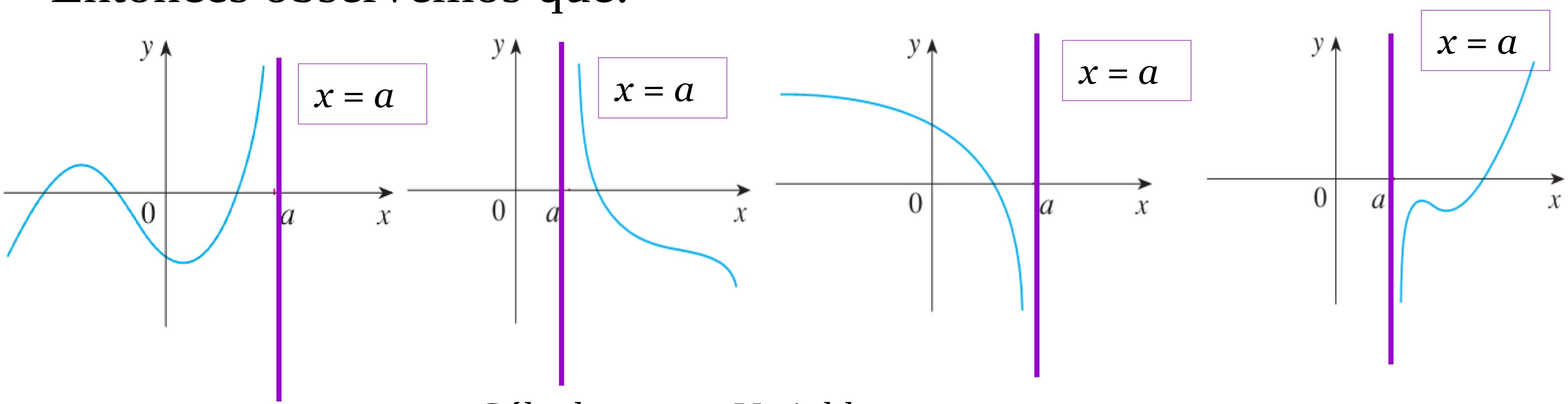
Definición

La recta $x = a$ se llama ***asíntota vertical*** de la curva $y = f(x)$ si se verifica al menos uno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Entonces observemos que:



Límite infinitos - Asíntotas verticales

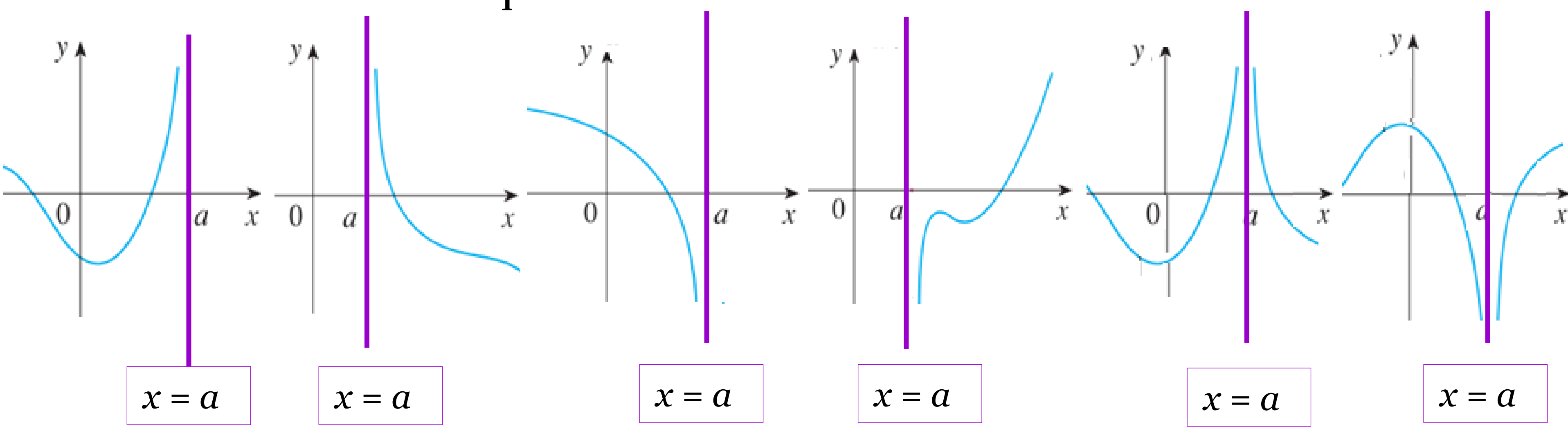
Definición

La recta $x = a$ se llama ***asíntota vertical*** de la curva $y = f(x)$ si se verifica al menos uno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Entonces observemos que:



Asíntotas verticales

Ejemplo

Hallar las asíntotas verticales de $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

Ejemplo

Hallar las asíntotas verticales de $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

Solución

$Domf = \mathbb{R} - \{-1,1\}$. Posibles asíntotas verticales, x = -1 y x = 1

- Analizo que ocurre con la recta *x=1*.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{x = 1 \text{ No es Asíntota Horizontal}}$

- Analizo que ocurre con la recta *x=-1*.

Calculo los límites laterales.

$$* \lim_{x\to -1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{(x+1)} = +\infty$$

$$* \lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{(x+1)} = -\infty$$

$\boxed{x = -1 \text{ es Asíntota Horizontal}}$

Límite - Teoremas

Teorema de existencia del límite

Si f es una función y a y L son dos números reales, entonces el límite de f cuando x tiende a *es* L sí y sólo si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \;\; y \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \mathrm{L}$$

Teorema

Si $f(x) \leq g(x)$ para todos los x en un intervalo abierto que contiene a a, con la posible excepción de a y, los límites de f y g existen cuando x tiende a

Entonces $$\lim_{x\to a} f(x) \quad \leq \quad \lim_{x\to a} g(x).$$

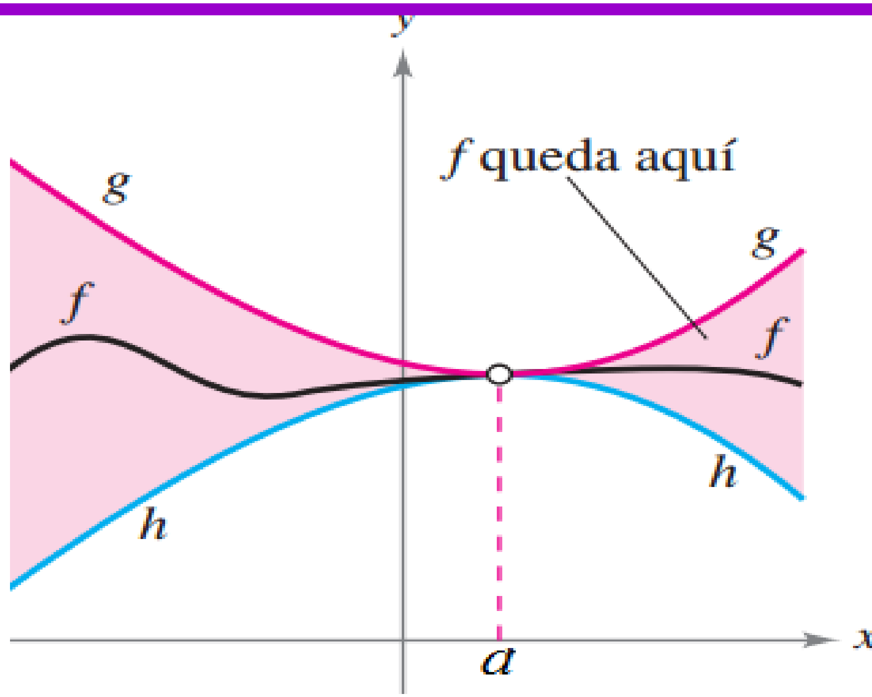
Límite - Teoremas

Teorema

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todos los x en un intervalo abierto que contiene a a , con la posible excepción de a y si

$$\lim_{x \to a} h(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$$

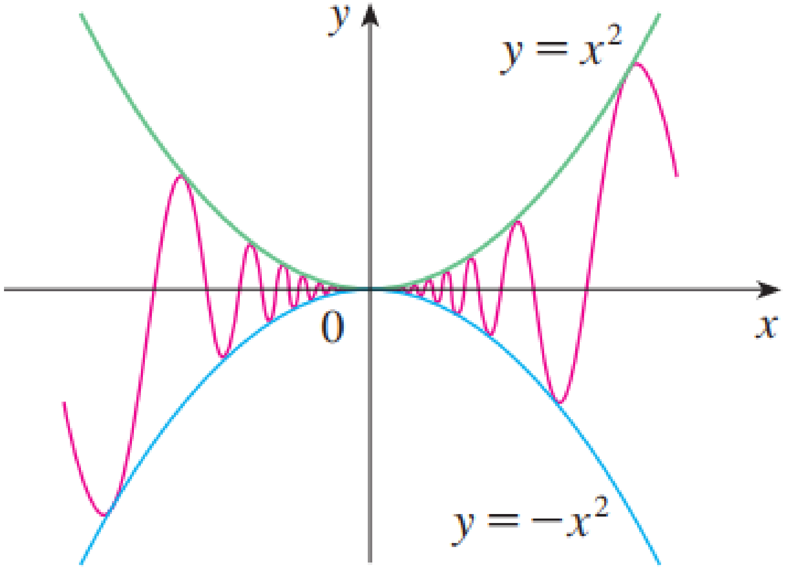
Entonces el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L, $\lim_{x \to a} f(x) = L.$

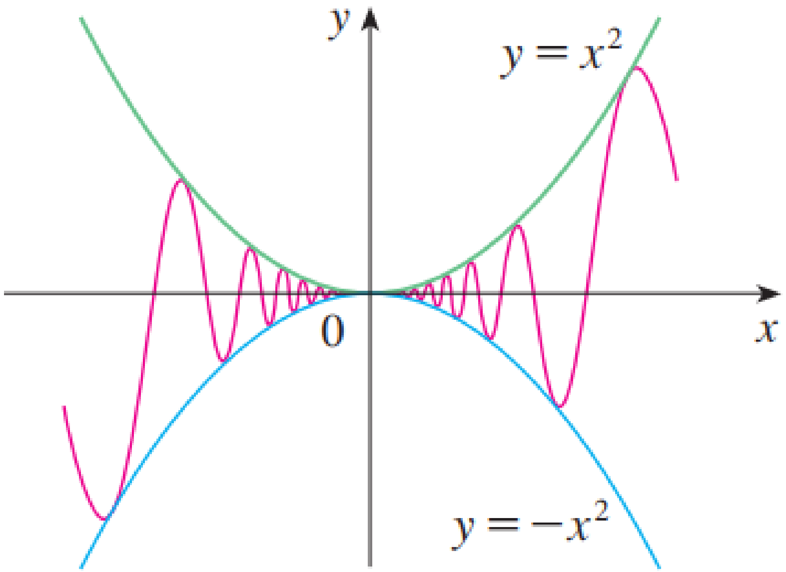


Ejemplo

Calcular

$$\lim_{x \to 0} x^2\, sen\left(\frac{1}{x}\right) =$$





Ejemplo

Calcular

$$\lim_{x \to 0} x^2\, sen\left(\frac{1}{x}\right) =$$

Solución

$$-1 \leqslant \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant 1$$

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant x^2$$

como $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ y $\lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0}$$

Bibliografía

STEWART, James, (2012): *"Cálculo de una variable*- *Trascendentes y tempranas"* - 7ma edición - Cengage – Learning – México.

Continuará……