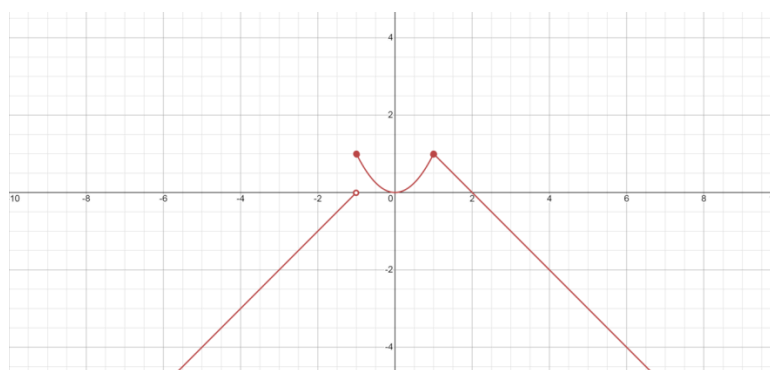


Ejercicios resueltos Guía 3 Límites

Ejercicio 7:b) Trace la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x + 1; & x < -1 \\ x^2; & -1 \leq x < 1 \\ 2 - x; & x \geq 1 \end{cases}$

- A partir de la misma, **determine los valores de a para los cuales $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe.**
 - Verifique **analíticamente**.
- a) Para realizar la gráfica de la función dada debemos identificar el comportamiento de la misma para cada intervalo de x .



A partir de la gráfica de f y teniendo en cuenta que el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe si los límites laterales existen y son iguales, determinamos que el valor de a para el cual $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe es $a = -1$. Observamos que a medida que x toma valores cada vez más cercanos a -1 , tanto por izquierda como por derecha, la función tiende a valores diferentes.

- b) Podemos verificar analíticamente que dicho límite no existe calculando los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 + x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = x^2 = (-1)^2 = 1$$

Como los límites hallados son diferentes, se verifica analíticamente que el $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \nexists$.

Ejercicio 10: Encuentre las asíntotas verticales de la función $y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$

Por definición, asíntotas verticales serán los valores x_0 de la variable independiente x tales que hagan que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

En este caso en particular, los CANDIDATOS a ser asíntotas verticales, son los valores de x que están excluidos del dominio de la función, es decir los valores que hagan que el denominador de la función valga cero, que en este caso son $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$.

Digo CANDIDATOS, porque ahora debo demostrar que verifiquen la definición de asíntota vertical, es decir, que los límites cuando x tiende a esos valores, den como resultado $\pm\infty$.

✓ Para $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2} =$$

Si uno analiza el límite del numerador y del denominador por separado, se daría cuenta que el límite del numerados es 1, mientras que el límite del denominador es cero (**no propongo aplicar propiedad de límites, porque no se puede, solo digo observar**). Esto nos daría una división por cero, lo cual no está definido. Por análisis de comportamiento podemos entonces decir que **este límite no existe**, y en este caso en particular, tenderá a $\pm\infty$, según hagamos el análisis de los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2} = -\infty$$

De este análisis, podemos decir entonces que $x = 0$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$.

✓ Para $x = \frac{3}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2} =$$

Si uno analiza el límite del numerador y del denominador por separado, se daría cuenta que el límite del numerados es $\frac{13}{4}$, mientras que el límite del denominador es cero (**no propongo aplicar propiedad de límites, porque nuevamente no se puede, solo digo observar**). Esto nos daría una división por cero, lo cual no está definido. Por análisis de comportamiento podemos entonces decir que **este límite no existe**, y en este caso en particular, tenderá a $\pm\infty$, según hagamos el análisis de los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2} = +\infty$$

De este análisis, podemos decir entonces que $x = \frac{3}{2}$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$.

Ejercicio 14 (inciso d) Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan(5x))^2}{3x^2} =$

Analizamos por sustitución directa límite del numerador y denominador por separado:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\tan(5x))^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 0$$

El límite del denominador al ser cero no nos permite utilizar la propiedad de cociente de funciones. Por lo que probamos trabajar algebraicamente la expresión.

Teniendo en cuenta que: $\tan(u) = \frac{\sin(u)}{\cos(u)}$ y hacemos la sustitución $u = 5x$

Como: $x \rightarrow 0 \Rightarrow 5x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\tan(u))^2}{3(u/5)^2} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\sin(u))^2}{(\cos(u))^2} \frac{25}{3u^2} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\sin(u))^2}{u^2} \frac{25}{3(\cos(u))^2} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta un límite conocido: (Ejemplo 3. Página 90 (Stewart))

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

Por sustitución directa:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{25}{3(\cos(u))^2} = \frac{25}{3}$$

Entonces dado que los límites en el producto existen podemos aplicar la propiedad del producto de los límites:

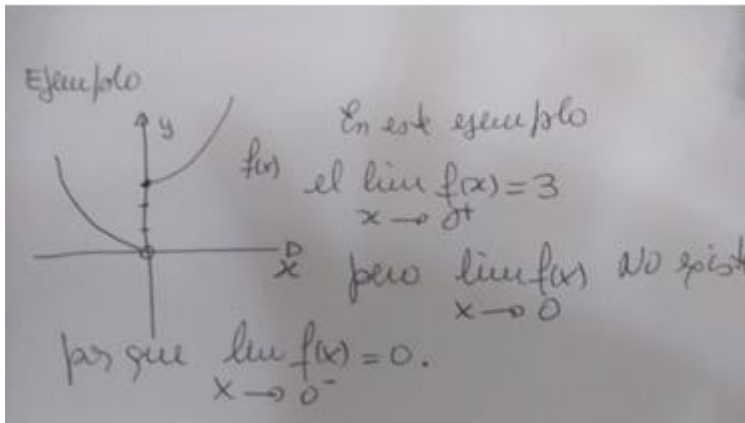
$$\begin{aligned} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{25}{3(\cos(u))^2} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{25}{3(\cos(u))^2} = 1 * 1 * \frac{25}{3} \end{aligned}$$

Respuesta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan(5x))^2}{3x^2} = \frac{25}{3}$$

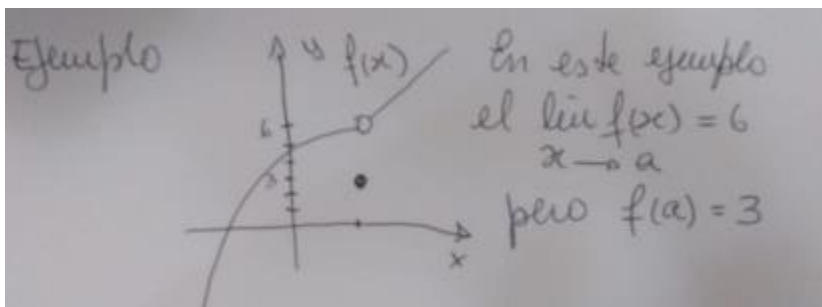
Ejercicio 16

- a) Si $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$.



Conclusión: la afirmación es Falsa.

- b) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 6$, entonces $f(a) = 6$.



Conclusión: la afirmación es Falsa.

- c) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2x}{x-4} - \frac{8}{x-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2x}{x-4} \right) - \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{8}{x-4} \right)$

Para aplicar la ley:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

deben existir los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

En nuestro caso, $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{8}{x-4} \right)$ **no existe** pues los límites $\lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{8}{x-4} \right) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{8}{x-4} \right) = +\infty$.

Conclusión: la afirmación es Falsa.

- d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+6x-7)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+5x-6)}$

Para aplicar la propiedad:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

debe existir el límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y se **debe verificar** que el $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.

Como el límite del numerador es $\lim_{x \rightarrow 1}(x^2 + 5x - 6) = (1)^2 + 5(1) - 6 = 0$ (función polinomial, hago sustitución directa), entonces no puedo aplicar la propiedad.

Conclusión: la afirmación es Falsa.

e) Si $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

Ejemplo:

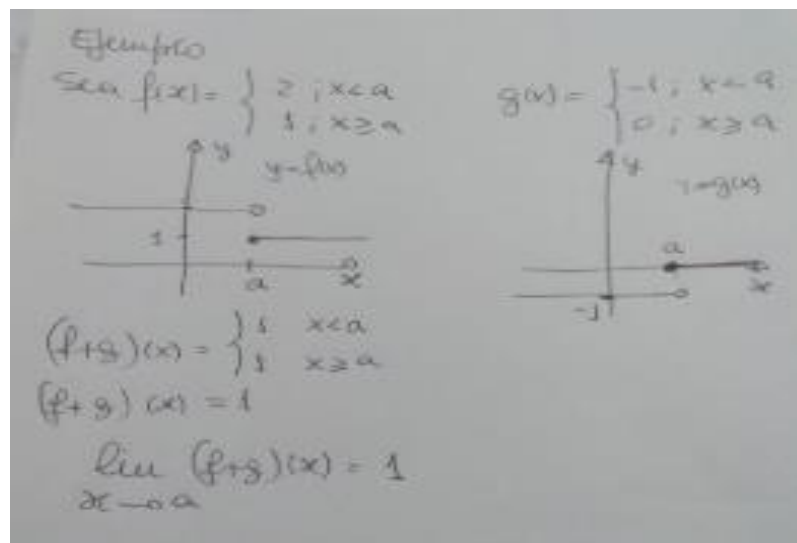
Sea $f(x) = (x - 3)^2$ y $g(x) = x - 3$, ambas verifican $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0$.

$$\text{Pero } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 3 - 3 = 0.$$

Conclusión: la afirmación es Falsa.

f) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ no existen, entonces $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ no existe.

Debo elegir f y g de modo tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ no existen pero que $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ exista.



Conclusión: la afirmación es Falsa.