

Coloquio I

Límites y Cálculo de Límites

Dr. Juan Felipe Restrepo
juan.restrepo@uner.edu.ar

Departamento Académico de Matemática
Cálculo en una Variable

Temas de clase:

1. Límites.

Sección 2.2 Pág. 87.

2. Cálculo de límites usando las leyes de los límites.

Sección 2.3 Pág. 99.

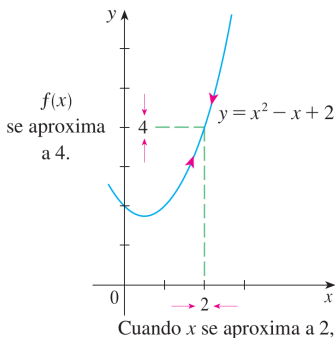
Definición: (Pág. 87 Stewart (2012))

Límite de una función:

Suponga que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a .
Entonces escribimos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

y decimos que: el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a , es igual a L .



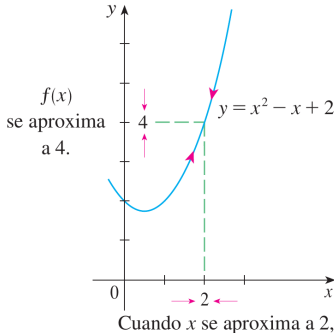
Definición: (Pág. 87 Stewart (2012))

Límite de una función:

Suponga que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a .
Entonces escribimos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

significa que $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L cuando x toma valores cercanos a a .



Ejemplo

Considere las funciones:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad y \quad g(x) = x + 1.$$

1. Graficar ambas funciones.
2. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
3. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

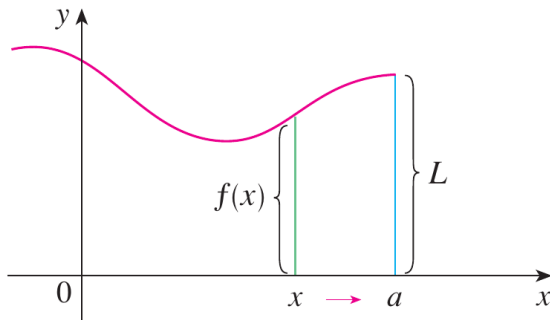
Definición: (Pág. 92 Stewart (2012))

Límite por izquierda:

La expresión:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

significa que $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L cuando x toma valores cercanos a a , pero menores que a .



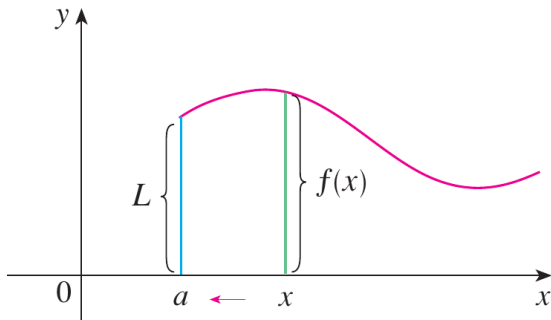
Definición: (Pág. 92 Stewart (2012))

Límite por derecha:

La expresión:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

significa que $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L cuando x toma valores cercanos a a , pero mayores que a .



Definición: (Pág. 92 Stewart (2012))

Existencia del Límite:

Decimos que:

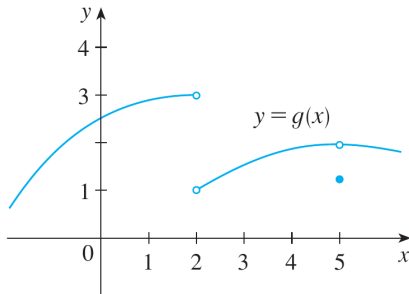
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

existe y es igual a L , si y sólo si:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Ejemplo

Considere la función $g(x)$:



Indicar:

1. $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

5. $\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

4. $\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x)$

6. $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$

Definición: (Pág. 100 Stewart (2012))

Límite de una función constante:

HIPÓTESIS

Si c es una constante

Entonces:

TESIS

1. $\lim_{x \rightarrow a} c = c.$

Definición: (Pág. 99-100 Stewart (2012))

Leyes de los límites:

HIPÓTESIS

Suponga que c es una constante y que los límites:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

existen.

Entonces:

TESIS

$$2. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Definición: (Pág. 99-100 Stewart (2012))

Leyes de los límites:

HIPÓTESIS

Suponga que c es una constante y que los límites:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

existen.

Entonces:

TESIS

$$3. \lim_{x \rightarrow a} [c f(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Definición: (Pág. 99-100 Stewart (2012))

Leyes de los límites:

HIPÓTESIS

Suponga que c es una constante y que los límites:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

existen.

Entonces:

TESIS

$$4. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Definición: (Pág. 99-100 Stewart (2012))

Leyes de los límites:

HIPÓTESIS

Suponga que c es una constante y que los límites:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

existen y

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

Entonces:

TESIS

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Definición: (Pág. 101 Stewart (2012))

Propiedad de sustitución directa:

HIPÓTESIS

Si f es una función polinomial o racional y a está en el dominio de f , entonces:

TESIS

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Ejemplo 1:

Sea $f(x) = x^2 - 4x + 8$

Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

Ejemplo 2:

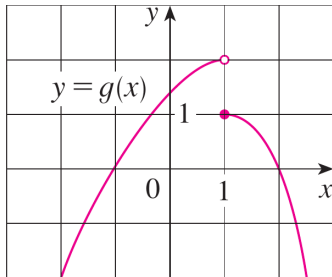
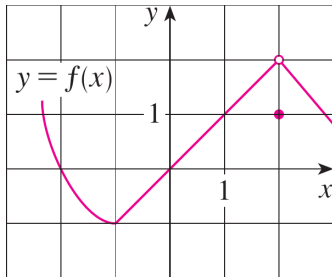
Sea $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Ejercicio:

Utilice las gráficas de f y g para evaluar cada límite:



1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x) + g(x)].$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)].$

2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x) + g(x)].$

4. $\lim_{x \rightarrow -1^-} [f(x) / g(x)].$

[Introducción](#)

[Cálculo de Límites:](#)
[Leyes de los Límites](#)

[Referencias](#)

Ejemplo:

Sea

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$$

Calcule:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Stewart, J., 2012. Cálculo de varias variables trascendentes tempranas, 7ma edición. Cengage Learning Editores.