

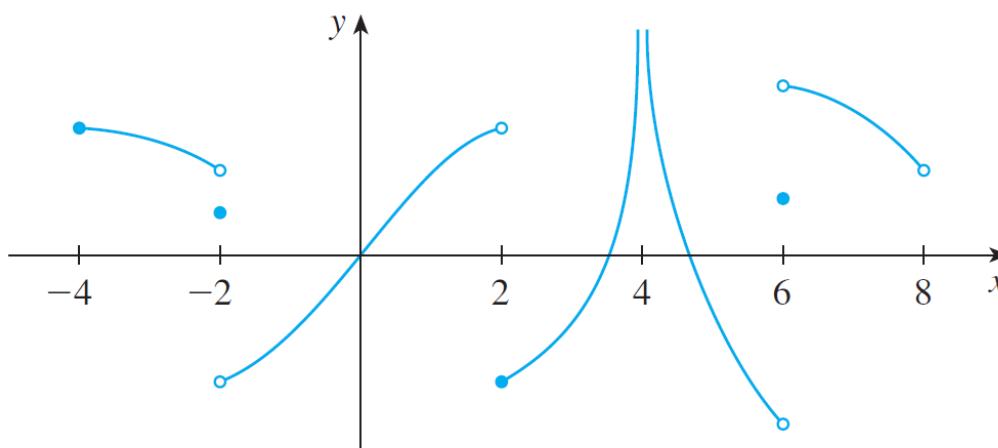
Guía de Trabajo Práctico IV

Límites en el infinito y continuidad

Calculo en una Variable - Cursado 2do Cuatrimestre

Ejercicios:

1. Escriba una expresión que indique el hecho de que una función g es continua en 4.
2. Si f es continua sobre $(-\infty, \infty)$, ¿qué puede decir acerca de su gráfica?
3. A partir de la gráfica de la función g en la Figura 1a, responda justificando su respuesta:
 - a. ¿ g es continua en 6?
 - b. ¿ g es continua en 0?
 - c. Indique el los números en el cual g es discontinua y explique por qué.
 - d. ¿ g es continua en el intervalo $(2, 4)$?
 - e. ¿ g es continua en el intervalo $(0, 4)$?
 - f. Los intervalos sobre los que g es continua.



(a)

Figura 1

4. Justifique por qué cada una de las siguientes funciones es discontinua en el número dado $x = a$. Dibuje la gráfica de la función.

$$\text{a. } a = -2, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases} \quad \text{b. } a = 0, f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

5. Estudie la continuidad de las siguientes funciones. Indique los puntos de discontinuidad y clasifique las discontinuidades. En todos los casos justifique sus respuestas. Grafique cada función.

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-3} & \text{si } x > 3 \\ 3x & \text{si } x \leq 3 \end{cases} \quad \text{b. } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 3 \\ x^2-5 & \text{si } 3 < x < 4 \\ 0 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

6. Utilizando los teoremas 4, 5, 7 y 9 presentados en la bibliografía CALCULO DE UNA VARIABLE trascendentes tempranas, explique por qué cada una de las siguientes funciones es continua en todo número de su dominio. Determine el dominio.

a. $R(x) = \frac{x+2}{e^x}$.

c. $G(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-x-1}$.

b. $R(t) = \frac{\sin t}{2+\cos(\pi t)}$.

d. $B(x) = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

7. Encuentre los límites justificando sus respuestas:

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + e^{x-1}}{x}$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos x}{x^2 + 9}$.

c. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

8. Explique con sus propias palabras el significado de cada uno de los siguientes límites

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.

9. ¿Puede la gráfica de $y = f(x)$ intersectar una asíntota vertical? ¿Puede intersectar una asíntota horizontal? Respuesta a lo solicitado mediante un ejemplo gráfico de ser posible.

10. ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de $y = f(x)$? Trace gráficas que muestren las distintas posibilidades.

11. Para la función g cuya gráfica está dada en la Figura 2a, establezca lo siguiente.

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

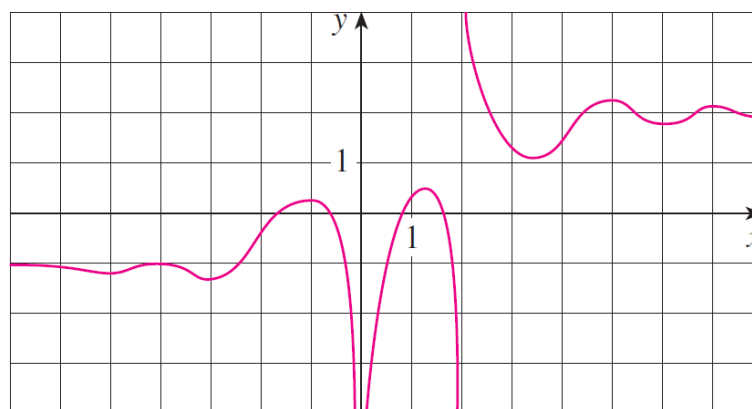
c. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

e. $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

d. $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$.

f. Las ecuaciones de las asíntotas.



(a)

Figura 2

12. Para cada inciso trace la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas:

$$\text{a. } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5 \\ \text{discontinua en } x = 3 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \\ f(0) = 3 \end{cases}.$$

13. Encuentre el límite o demuestre que no existe.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^2}{x^3 - x + 1}. \quad \text{b. } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}. \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}. \quad \text{d. } \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} + 2 \cos 3x).$$

14. Encuentre las asíntotas horizontal y vertical de cada curva. Si tiene un dispositivo graficador, verifique su trabajo graficando la curva y estimando las asíntotas.

$$\text{a. } y = \frac{x + 1}{(x - 2)^2}. \quad \text{b. } y = \frac{1 + x^2}{x + x^2}. \quad \text{c. } y = \frac{2}{1 - 1/e^x}.$$

15. Determinar si cada afirmación es verdadera (V) ó falsa (F). Si es verdadera explicar por qué. Si es falsa, explicar por qué ó dé un ejemplo que refute la afirmación.

- Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.
- Si la función f es continua en $x = 3$, entonces $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ existe.
- Si f no tiene asíntota horizontal en el intervalo $(0, \infty)$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ o $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$, entonces $f(1) = 3$.
- La función $1/x$ es una función continua.

16. Un depósito contiene 5000 L de agua pura. Se bombea salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua al depósito con una proporción de 25 L/min. La concentración de sal en gr/L medida t minutos después es:

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

Analice que sucede con la concentración cuando $t \rightarrow \infty$?