Facultad de Ingeniería

Cálculo en una Variable

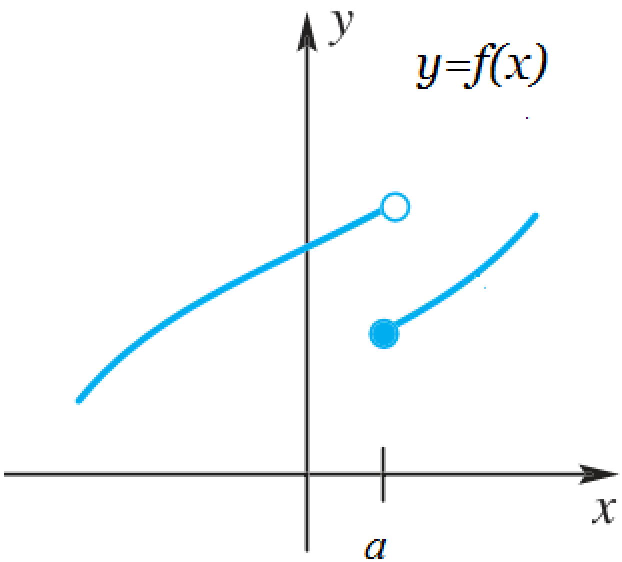
Bioingeniería
Licenciatura en Bioinformática
Ingeniería en Transporte

Tema: Continuidad - Límite en el infinito

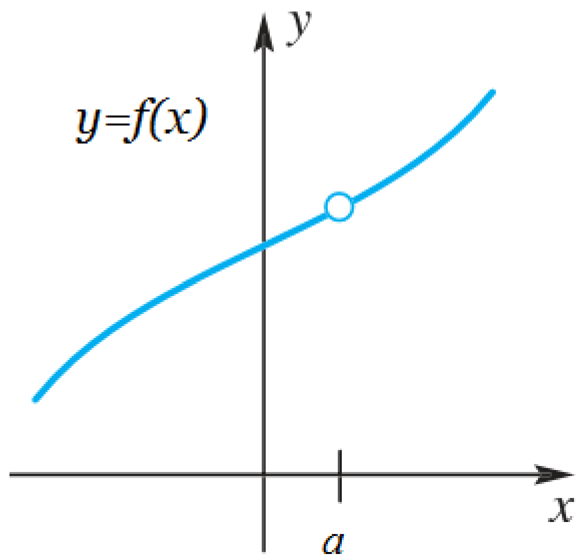
Sección 2.5 : Continuidad

Continuidad

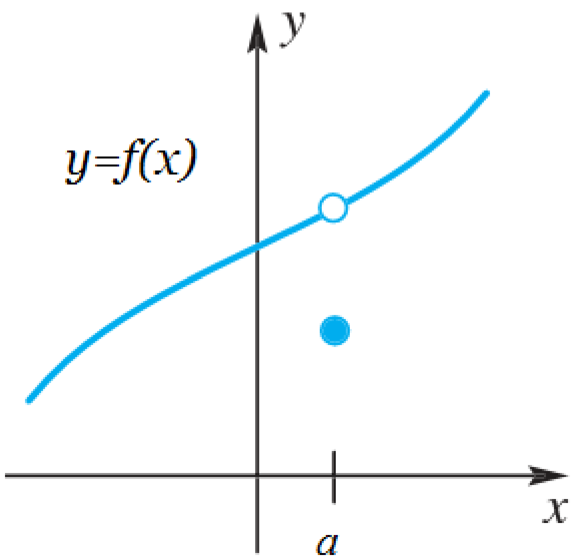
Consideremos los siguientes gráficos de f y observemos que ocurre en a



- $\lim_{x \to a} f(x)$ ***No existe***
- ***f(a) existe***



- $\lim_{x \to a} f(x)$ ***existe***
- ***f(a) No existe***



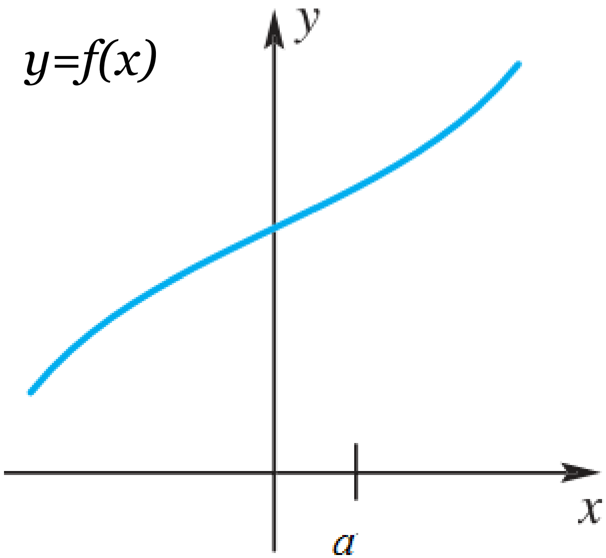
- $\lim_{x \to a} f(x)$ ***existe***
- ***f(a) existe***

pero

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

Continuidad

Es decir la idea de un grafico continuo de una función en a es

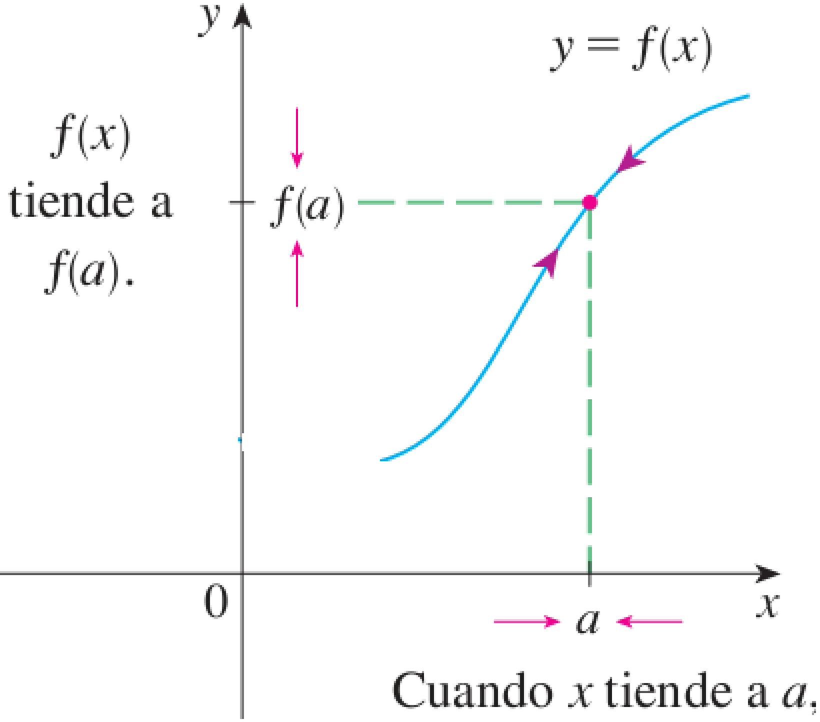


$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Continuidad

Definición:
Una función f es ***continua en un número*** $x = a$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$



Es decir
si f es ***continua*** en a, entonces

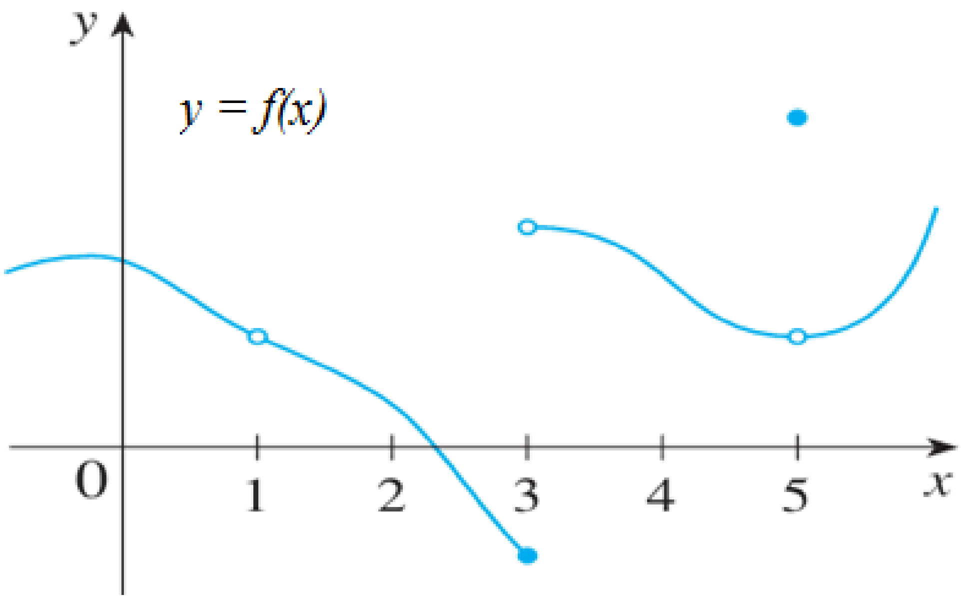
- $f(a)$ ***está definida***, (esto es, a está en el dominio de f)
- $\lim_{x \to a} f(x)$ ***existe***
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si f está definida cerca de a, (excepto quizás en a) y no es continua en a, se dice que f es ***discontinua*** en a (o f tiene una **discontinuidad** en a).

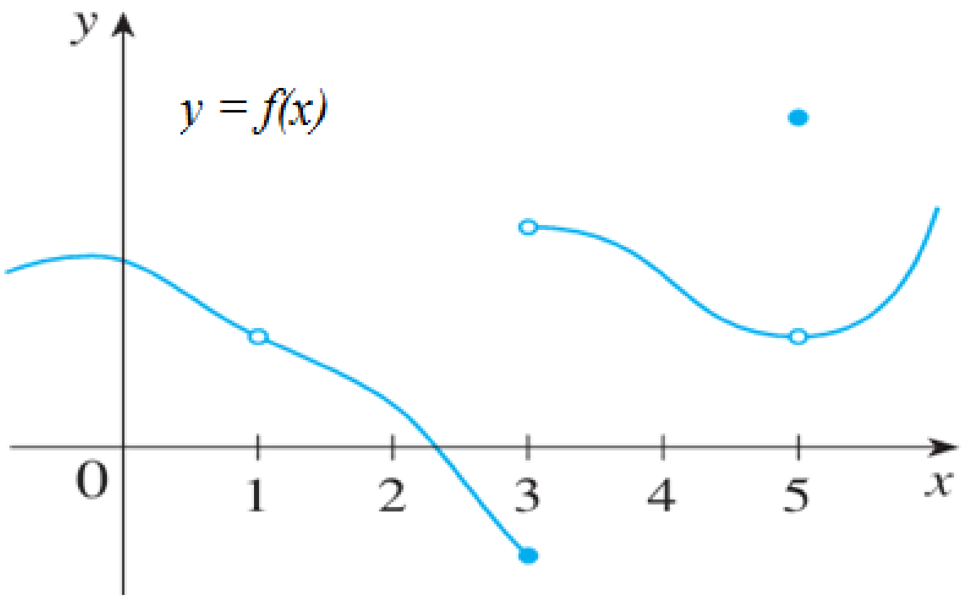
Continuidad

Ejemplo

Para qué valores de *x* la función es discontinua y porqué ?



Continuidad



f es ***continua*** en *a*, entonces

- *f*(*a*) ***está definida***
- $\lim_{x \to a} f(x)$ ***existe***
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

En 1

- *f*(1) no existe

f no es continua en 1

En 3

- *f*(3) existe.
- $\lim_{x \to 3} f(x)$ *No* ***existe***

f no es continua en 3

En 5

- *f*(5) existe.
- $\lim_{x \to 5} f(x)$ ***existe.***
- $\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$

f no es continua en 5

Continuidad

Ejemplo

Analizar la continuidad de las siguientes funciones en $x = 1$

a) $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$

$b)\ g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

Continuidad

f es ***continua*** en a, entonces

- $f(a)$ ***está definida***
- $\lim_{x \to a} f(x)$ ***existe***
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Solución

a) $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

Consideremos la definición

- $f(1) = 1 - 1 = 0.$
- Para determinar el $\lim_{x \to 1} f(x)$, como la función esta definida por partes , debemos calcular los límites laterales

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 1) = 0$$

como los límites laterales ***son diferentes***, entonces el $\lim_{x \to 1} f(x)$ ***No existe***

Por lo tanto ***f No es continua en 1***

$b)\ g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Consideremos la definición

- $f(1)$ ***No existe***

Por lo tanto ***f No es continua en 1***

Continuidad

Solución

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

f es ***continua*** en a, entonces
- $f(a)$ ***está definida***
- $\lim_{x \to a} f(x)$ ***existe***
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Consideremos la definición

- $f(1) = 2$.
- Al calcular el $\lim_{x \to 1} f(x)$ aunque la función esta definida por partes, tiene la misma definición para distintos valores de 1, es decir , que el límite $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ (observemos que cuando x se acerca a 1 por derecha e izquierda, el denominador tiende a 0, por lo tanto el cociente toma valores muy grande en valor absoluto)

Los límites laterales

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

entonces el $\lim_{x \to 1} f(x)$ ***No existe.***

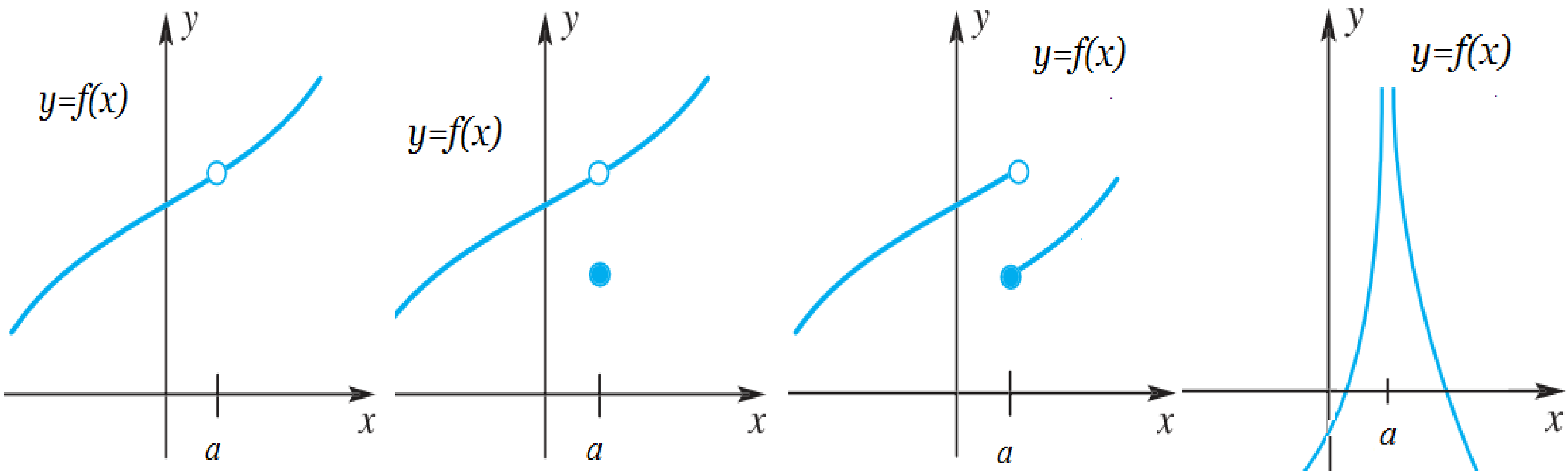
Por lo tanto ***f No es continua en 1***

Continuidad

Clasificación de las discontinuidades

- Evitables o removibles : podemos remover la discontinuidad redefiniendo f. *(El límite existe)*

- Inevitables o no removibles $\left\{ \begin{array}{l} \text{Discontinuidad infinita} \\ \text{Discontinuidad de salto} \end{array} \right.$



Discontinuidad evitable

Discontinuidad evitable

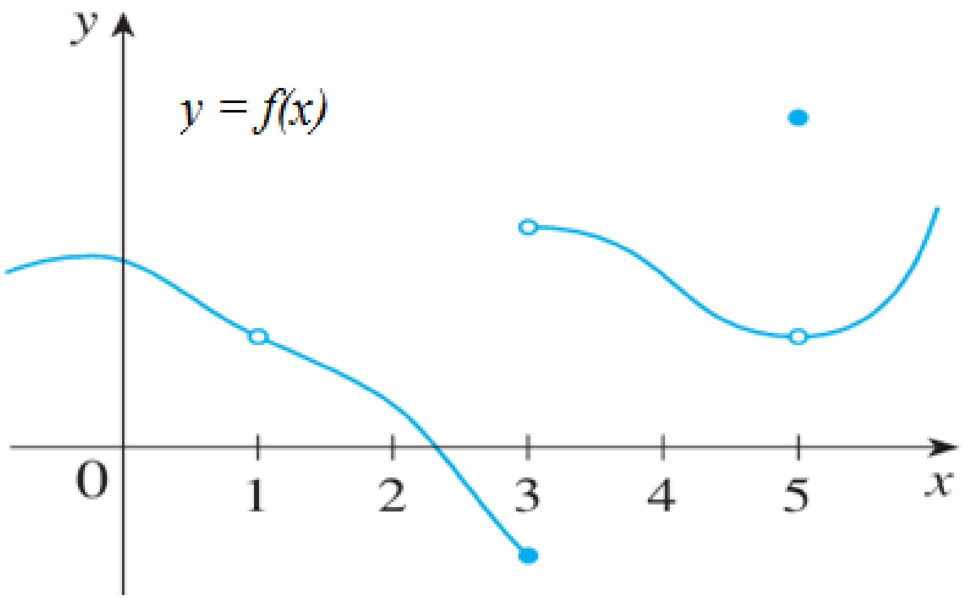
Discontinuidad inevitable de salto

Discontinuidad inevitable infinita

Continuidad

Ejemplo

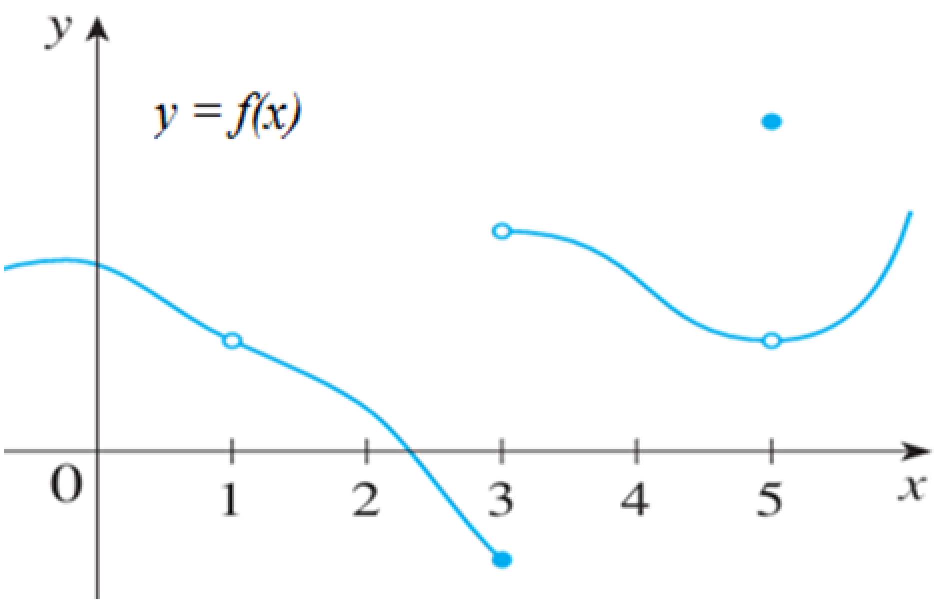
Clasificar las discontinuidades presentadas



Evitables o removibles : podemos remover la discontinuidad redefiniendo f. *(El límite existe)*

Inevitables o no removibles $\left\{ \begin{array}{l} \text{Discontinuidad infinita} \\ \text{Discontinuidad de salto} \end{array} \right.$

Solución



En 1

Existe el límite $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Discontinuidad evitable

En 3

El $\lim_{x \to 3} f(x)$ ***no existe.***

Discontinuidad inevitable de salto

En 5

Existe el limite $\lim_{x \to 5} f(x)$

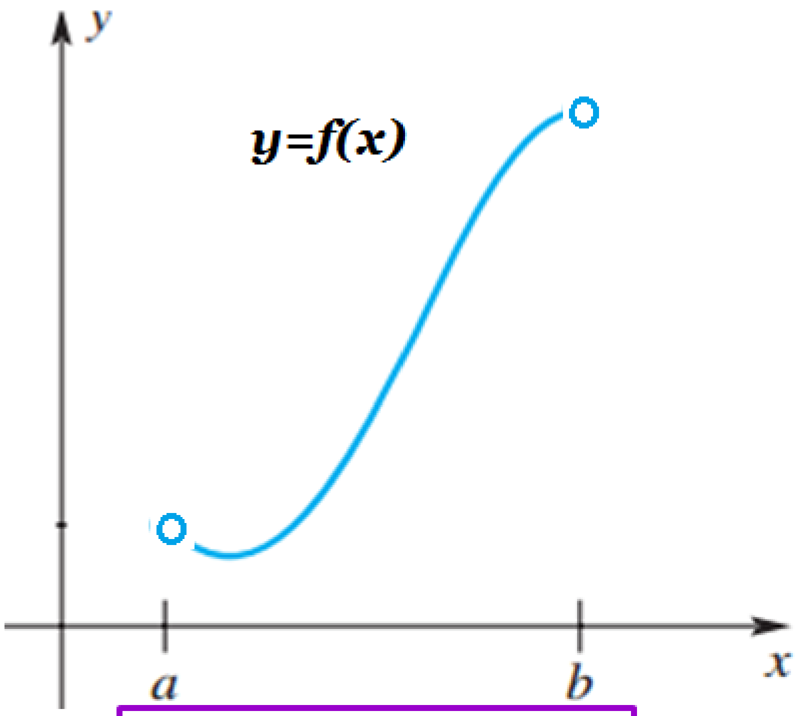
Discontinuidad evitable

Continuidad en un intervalo

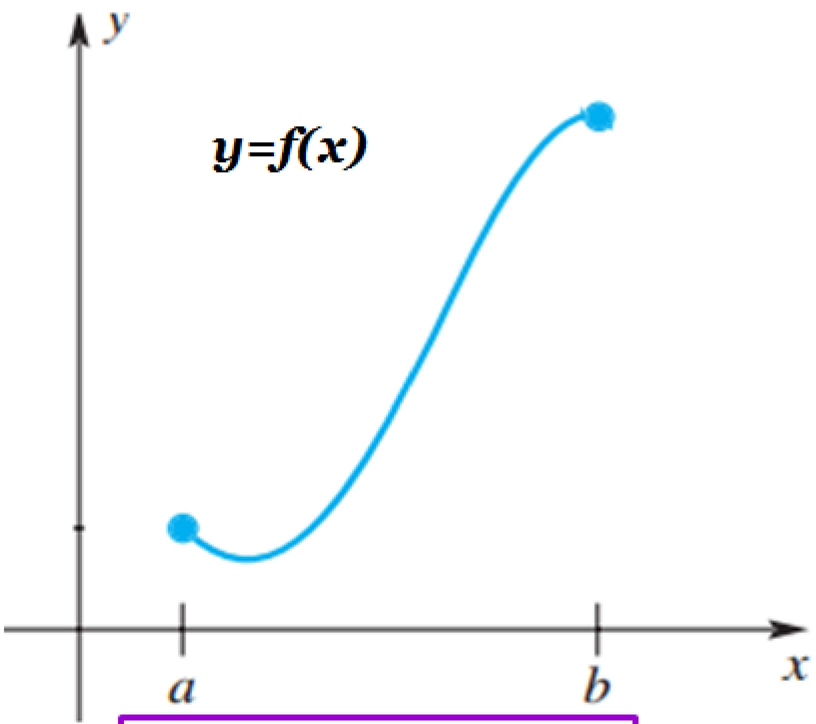
Definición Una función f :

- es ***continua sobre un intervalo abierto (a,b)*** si es continua en cada número en el intervalo
- es ***continua sobre un intervalo cerrado [a,b]*** si es continua en el intervalo abierto (a, b) y

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad y \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$



Continua en (a,b)

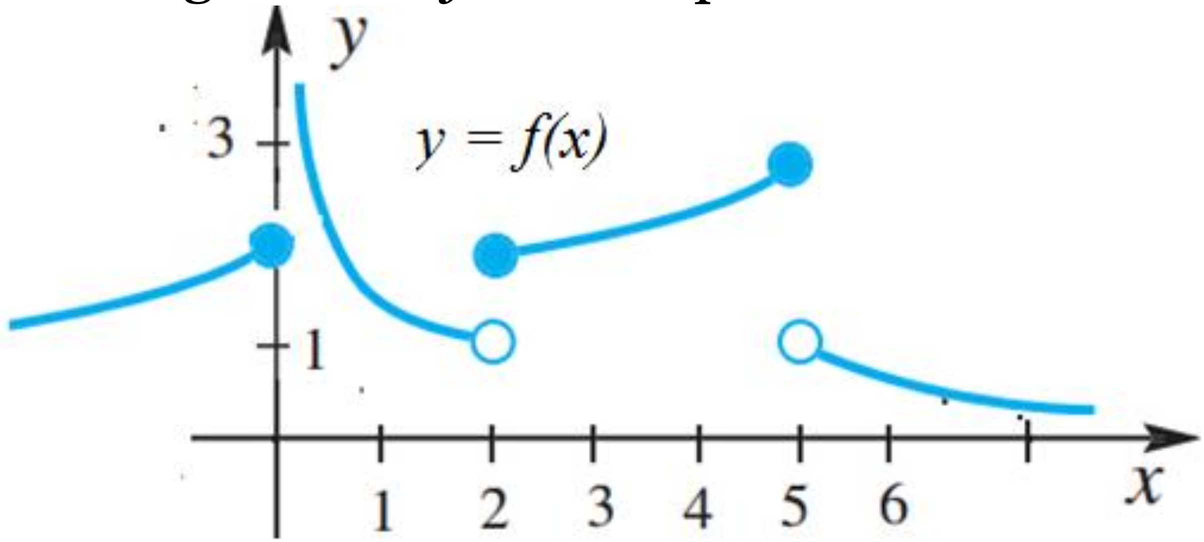


Continua en [a,b]

Continuidad en un intervalo

Ejemplo

Observando la gráfica de f vemos que:



- f es ***continua*** sobre los intervalos abiertos (0,2) y (5,+∞)
- f es ***continua*** sobre el intervalo cerrado [2,5] ya que es continua en el intervalo abierto (2,5) y

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \quad y \quad \lim_{x \to 5^-} f(x) = f(5)$$

- f es ***continua*** sobre el intervalo semi-cerrado (-∞, 0] ya que es continua en el intervalo abierto (-∞, 0) y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$.

Continuidad

Teorema 4

Si k es un número real y, f y g son funciones continuas en a, entonces las siguientes funciones también son continuas en a.

- Múltiplo escalar: kf
- Suma : $f+g$
- Diferencia : $f-g$
- Producto: $f.g$ ✓
- Cociente : $\frac{f}{g}$ si, $g(a)\neq 0$

Continuidad

Si f y g son funciones continuas en a, entonces $f.g$ es continua en a.

Hipótesis. **Tesis.**

Demostración

Si f y g son funciones son continuas en a, tenemos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to a} (f.g)(x) = \lim_{x \to a} [f(x).g(x)] =$$

Ley de producto de límites.

$$= \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x) =$$

$$= f(a).g(a) =$$

$$= (f.g)(a)$$

Teniendo en cuenta la definición de continuidad, $f.g$ es continua en a.

Continuidad

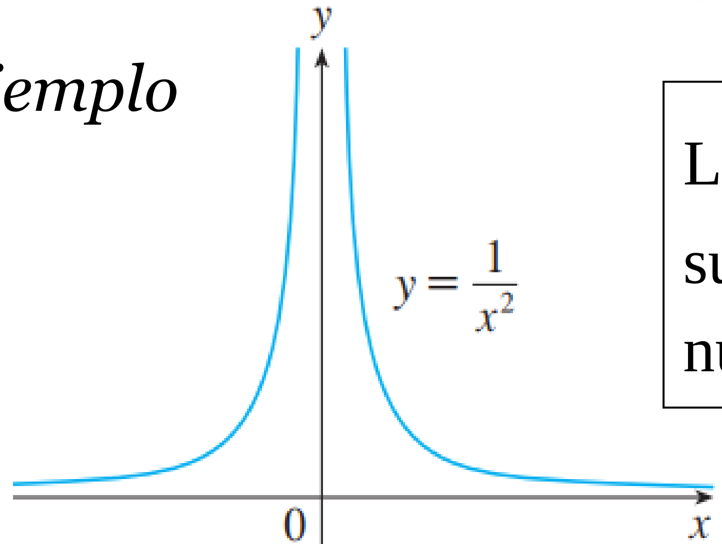
Del Teorema 4 y la definición de continuidad en un intervalo se deduce que:

Si f y g son funciones continuas en un intervalo I, entonces las funciones kf, $f+g$, $f-g$, $f.g$ y $\frac{f}{g}$ (si g no es 0 en todo el intervalo) también son continuas en *todo el intervalo I.*

Función Continua

Diremos que una función es ***continua*** si es continua en ***todo su dominio*** .

Ejemplo



La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es ***continua***, pues su dominio es R-{0} y es continua en cada número de su dominio.

Continuidad

¿Cuál de las funciones que estudiamos son ***continuas?***

Continuidad

Las funciones de los siguientes tipos son ***continuas*** en su ***dominio***.

- ***Funciones polinomiales:***

$$p(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$$

- ***Funciones racionales:*** $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}\ ,\ q(x) \neq 0$
- ***Funciones radicales:*** $f(x) = \sqrt[n]{x}$
- ***Funciones exponenciales:*** $f(x) = a^x,\ a > 0, a \neq 1$
- ***Funciones logarítmicas:*** $f(x) = \log_a x\,, a > 0, a \neq 1$
- ***Funciones trigonométricas:*** *cos x, sen x. tag x, ...*

Continuidad

Las funciones de los siguientes tipos son ***continuas*** en su ***dominio***.

- ***Funciones polinomiales:***

$p(x) = a_n\, x^n + \cdots + a_1\, x + a_0$

- ***Funciones racionales:***

$r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}\ ,\ \ q(x) \neq 0$

- ***Funciones radicales:***

$f(x) = \sqrt[n]{x}$

- ***Funciones exponenciales:***

$f(x) = a^x, \qquad a > 0, a \neq 1$

- ***Funciones logarítmicas:***

$f(x) = \log_a x\, , a > 0, a \neq 1$

- ***Funciones trigonométricas:***

cos x, sen x. tag x, …

Si k ϵ R y las funciones f y g son ***continuas***, entonces las funciones.

- Múltiplo escalar: kf
- Suma : $f + g$
- Diferencia : $f - g$
- Producto: $f\,.\,g$
- Cociente: $\dfrac{f}{g}$ (si g no es 0 en todo su dominio)

también son ***continuas.***

Ejemplo

Indicar si cada una de las siguientes funciones son continuas:

a) $f(x) = x^2 + sen\ x$

b) $g(x) = 5xe^x$

c) $h(t) = \frac{\ln t}{t^2+3}$

Continuidad

Si $k \in R$ y las funciones f y g son ***continuas***, entonces las funciones.

- Múltiplo escalar: kf
- Suma : $f+g$
- Diferencia : $f-g$
- Producto: $f.g$
- Cociente : $\frac{f}{g}$ si, $g(a) \neq 0$

también son ***continuas.***

Las funciones de los siguientes tipos son ***Continuas*** en su ***dominio***.

- ***Funciones polinomiales:***
$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$
- ***Funciones racionales:***
$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$
- ***Funciones radicales:***
$f(x) = \sqrt[n]{x}$
- ***Funciones exponenciales:***
$f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$
- ***Funciones logarítmicas:***
$f(x) = \log_a x , a > 0, a \neq 1$
- ***Funciones trigonométricas:***
cos x, sen x. tag x, ...

Solución

$$\boldsymbol{a}) \ f(x) = \underbrace{x^2}_{} + \underbrace{sen\,x}_{}$$

***y = x²* es continua en todo R**

***y = sen x* es continua en todo R**

$f(x) = x^2 + sen\,x$ **es continua en todo R**

$$\mathbf{c}) \ h(t) = \frac{\ln t}{t^2+3}$$

y = ln t es continua en todo R⁺

y = t² + 3 es continua en todo R

entonces $h(t) = \frac{\ln t}{t^2+3}$ ***es continua todo R⁺***

(*y*= $t^2 + 3$, *no es 0 en todo* R^+)

Y las funciones ?

a) $h(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x}$

b) $h(x) = sen(\frac{1}{x})$

c) $h(t) = \ln(t + 3)$

Veamos los siguientes teoremas

Continuidad

Teorema

Si $\underbrace{f \text{ es continua en } b, \text{ y } \lim_{x\to a} g(x) = b}_{\textit{Hipótesis}}$, entonces $\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f(b)$

En otras palabras

$$\underbrace{\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f(\lim_{x\to a} g(x))}_{\textit{Tesis}}$$

Ejemplo (aplicación del teorema)

Calcular $\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x-1}}$

Continuidad

Teorema

Si f es continua en b, y $\lim_{x\to a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x\to a} f\left(g(x)\right) = f(\lim_{x\to a} g(x))$

$$\underbrace{f \text{ es continua en } b,\ \text{y } \lim_{x\to a} g(x) = b}_{\textit{Hipótesis}} \qquad \underbrace{\lim_{x\to a} f\left(g(x)\right) = f(\lim_{x\to a} g(x))}_{\textit{Tesis}}$$

Solución

Sea $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ y $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Veamos si se verifican las ***hipótesis*** del teorema

- $\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$
- f es continua en *2*

Se verifican, entonces puedo aplicar la ***tesis*** teorema

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x-1}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}} = \sqrt[3]{2}$$

Continuidad de una función compuesta

Teorema

Si g es continua en $x = a$ y f es continua g(a) , entonces la función compuesta fog dada por $(fog)(x) = f(g(x))$ es continua en $x = a$.

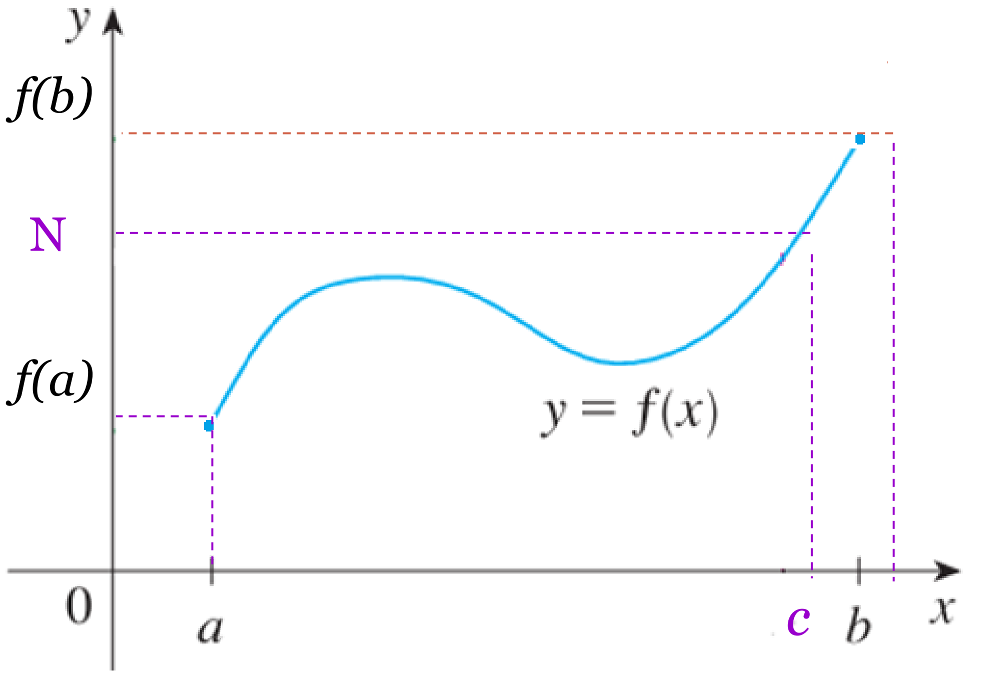
Como cada una de las siguientes funciones son composición de funciones continuas, ellas son continuas en su dominio:

- a)$h(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x}$
- b) $h(x) = sen(\frac{1}{x})$
- c) $h(t) = \ln(t + 3)$

Teorema del valor intermedio

Teorema

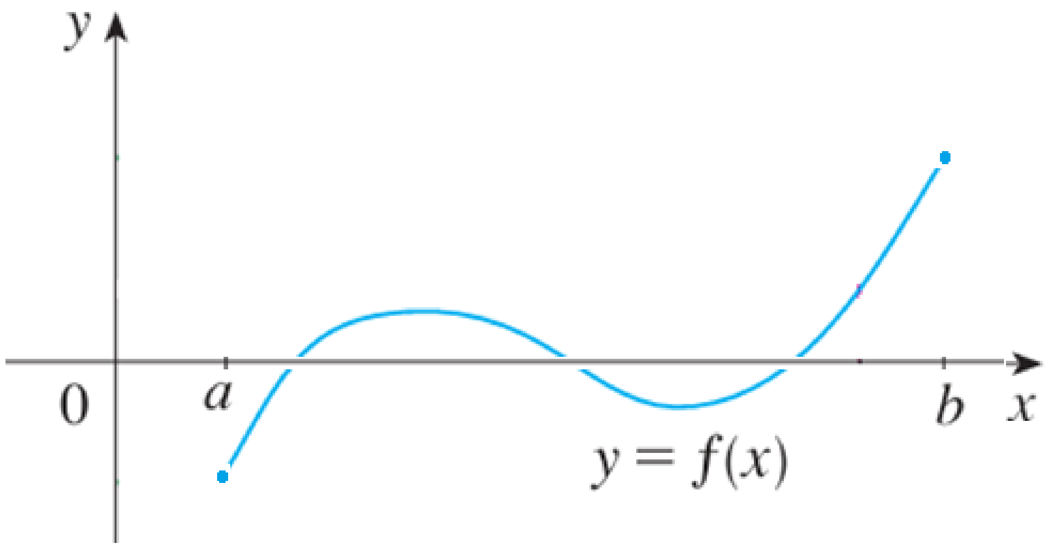
Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$ donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número c en el intervalo (a, b) tal que $f(c) = N$.



Teorema del valor intermedio

Corolario

Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$. Entonces existe un número c en (a,b) tal que $f(c) = 0$.



Ejemplo (Aplicación del Teorema)

Probar que la ecuación $x - \cos x = 0$ tiene una solución entre $x = 0$ y $x = \pi/2$

Corolario

- f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$
- signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$.

Hipótesis

entonces

existe un número c en intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) = 0$.

Tesis

Solución:

Para probar que la ecuación $x - cos\ x = 0$ tiene una solución entre $\mathrm{x} = 0$ y $\mathrm{x} = \frac{\pi}{2}$ probaremos que la función $f(x) = x - cos\ x$ tiene un cero en el intervalo abierto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y para ello utilizaremos el corolario.

Verificamos las hipótesis

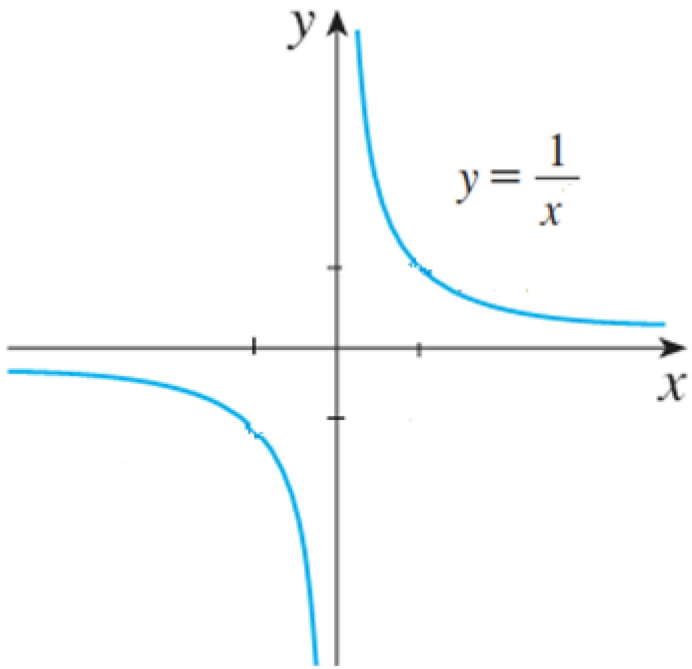
- $f(x) = x - cos\ x$ es una función continua en el intervalo cerrado $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ porque es la diferencia entre las funciones $\mathrm{y} = x$ e $\mathrm{y} = cos\ x$ que también son continuas en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $f(0) = 0 - cos\ 0 = -1$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{sig} f(0) \neq \mathrm{sig} f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Se verifican las hipótesis entonces existe un número c en intervalo abierto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$, es decir que verifica la ecuación $x - cos\ x = 0$.

Sección 2.6 : Límite en el infinito Asíntota horizontal

Límite en el infinito

Consideremos la función



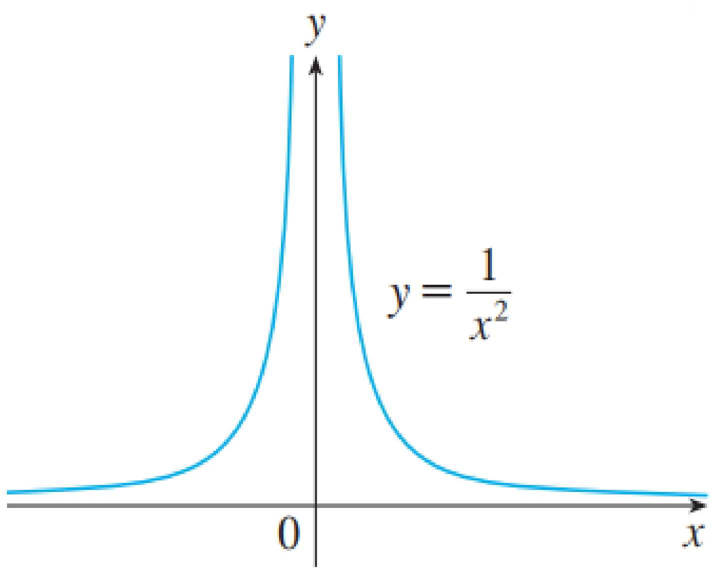
Y observemos los siguientes límites

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0}$$

Límite en el infinito

A la función



y observemos los siguientes límites

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0}$$

Límite en el infinito

En resumen

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0}$$

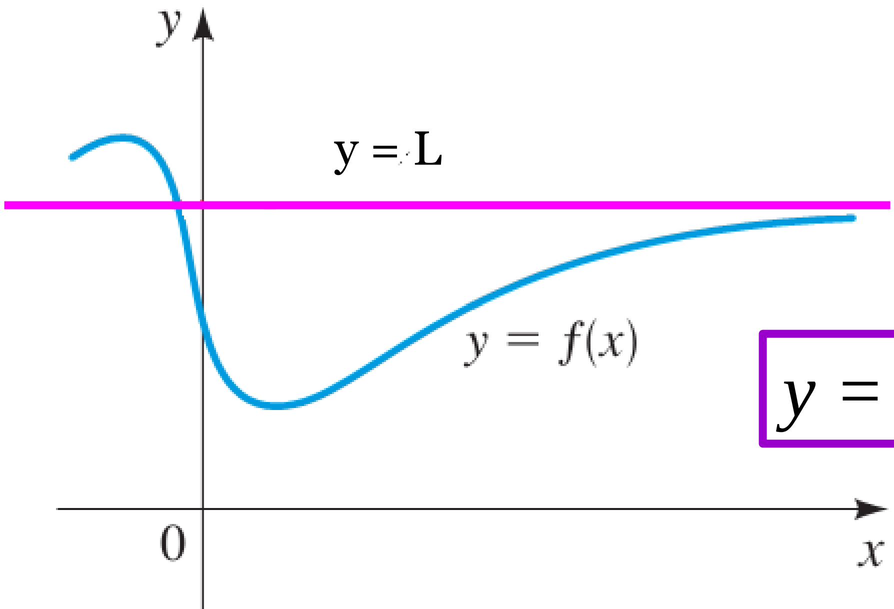
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0}$$

Si consideramos k ***entero positivo***

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0}$$

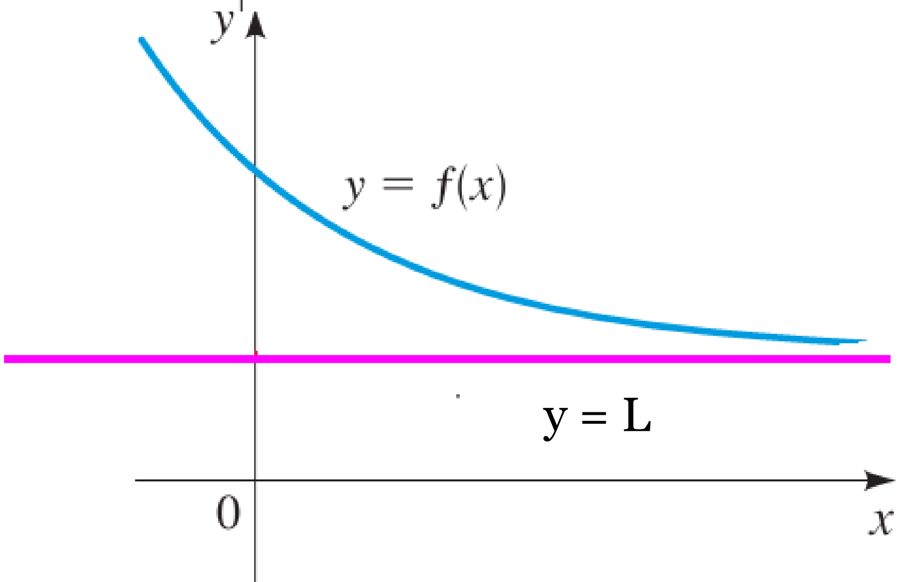
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k}=0}$$

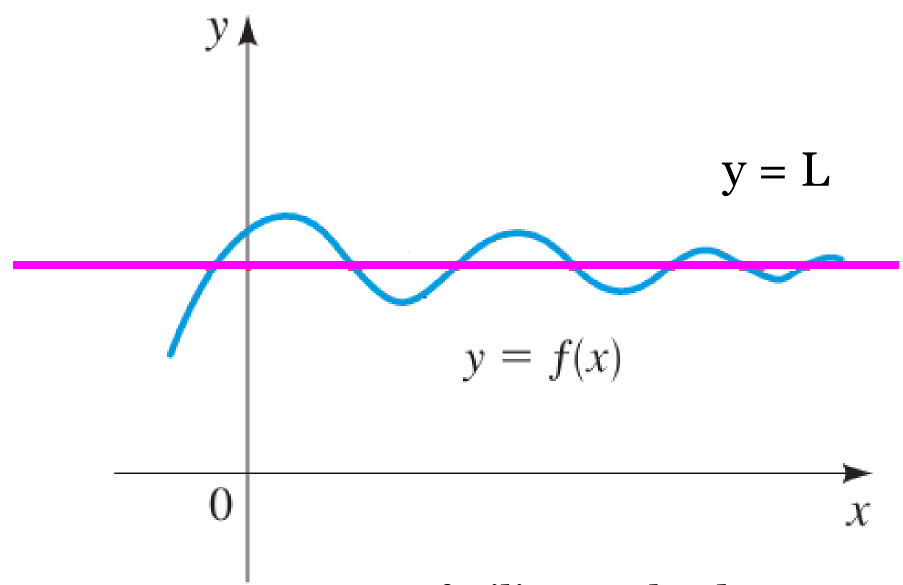
Límite en el infinito –Asíntota horizontal



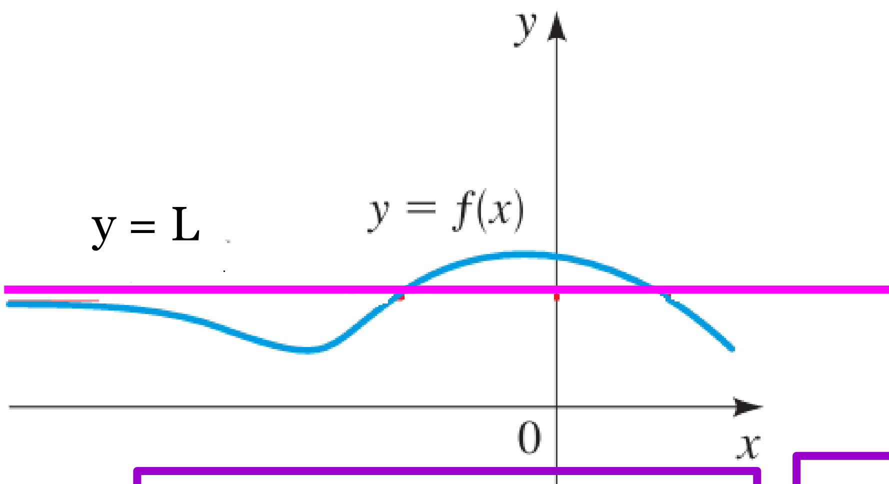
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

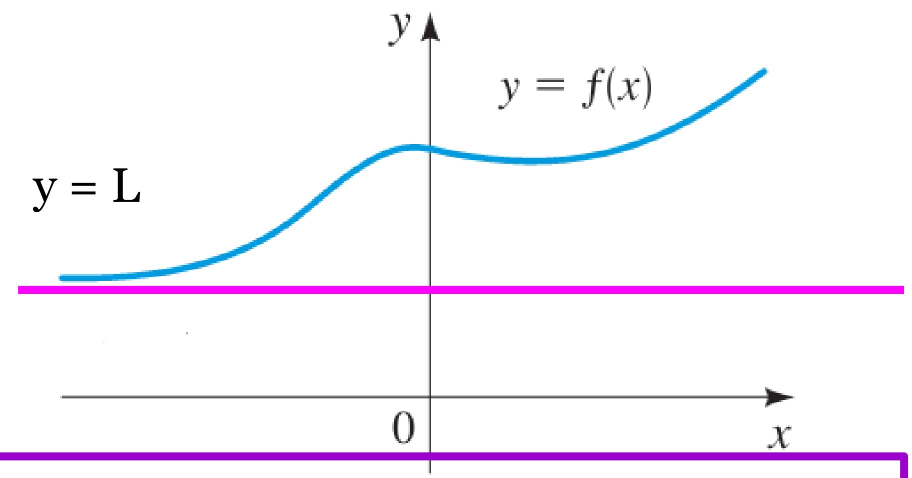
$y =$ **L es una asíntota horizontal**





Límite en el infinito negativo – Asíntota horizontal





$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = L}$$

$y =$ ***L* es una asíntota horizontal**

Definición:

La recta y= L es una ***asíntota horizontal*** de la gráfica de y= $f(x)$ si se verifica algunos de estos límites

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Ejemplo: Hallar las asíntotas horizontal de $f(x) = \dfrac{2x}{x - x^2}$

Asíntota horizontal

Definición:

La recta y= L es una ***asíntota horizontal*** de la gráfica de y= $f(x)$ si se verifica algunos de estos límites

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Solución:

Para hallar las asíntotas horizontales calculo el limite de f a +□ y a -□

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x-x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Divido numerador y denominador por la variable x elevada a la mayor potencia a la que se encuentra en el denominador

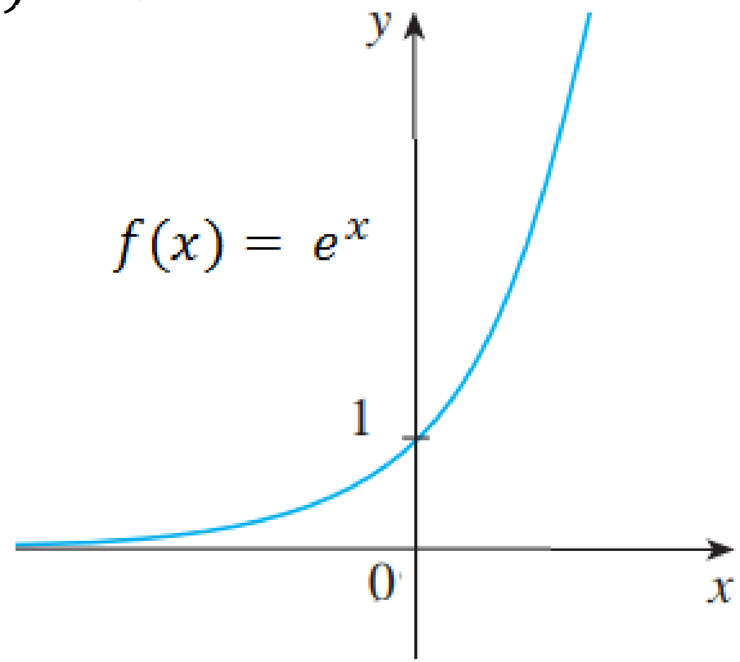
- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x-x^2}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

La recta y = 0 es asíntota horizontal

Límite infinito en el infinito

Consideremos la siguiente función $f(x) = e^x$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$



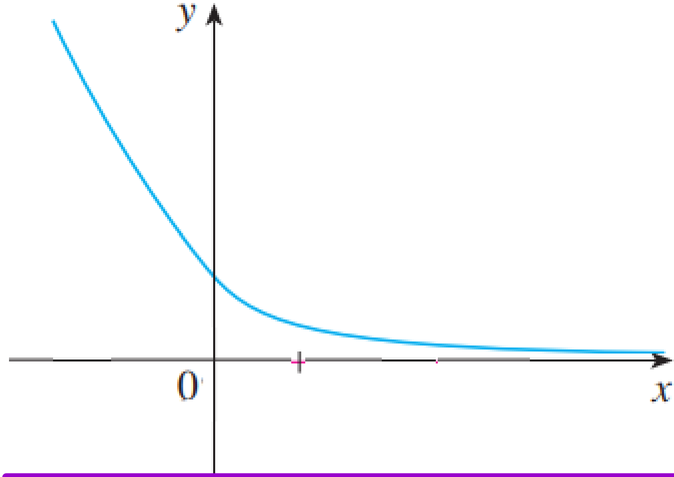
La expresión

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

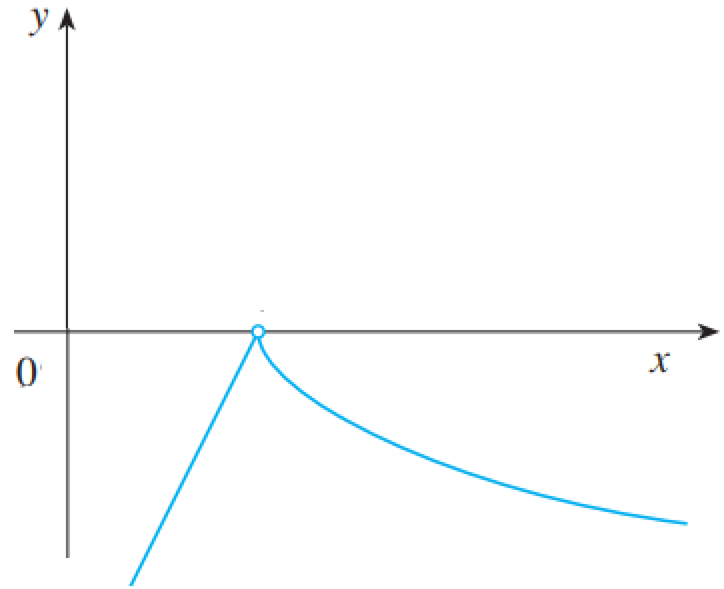
indica que los valores de *f(x)* se hacen más grandes cuando *x* se hace muy grande.

Límite infinito en el infinito

Se puede dar los siguientes casos:



$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$



$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

Bibliografía

STEWART, James, (2012): *"Cálculo de una variable- Trascendentes y tempranas"* - 7ma edición - Cengage – Learning – México.