Guía Práctica Nro 4: Continuidad

Respuestas

Ejercicio 1:

$\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$

Ejercicio 2:

Su gráfica se puede realizar sin levantar el lápiz. No presenta interrupciones ni saltos.

Ejercicio 3:

a) g es discontinua en:

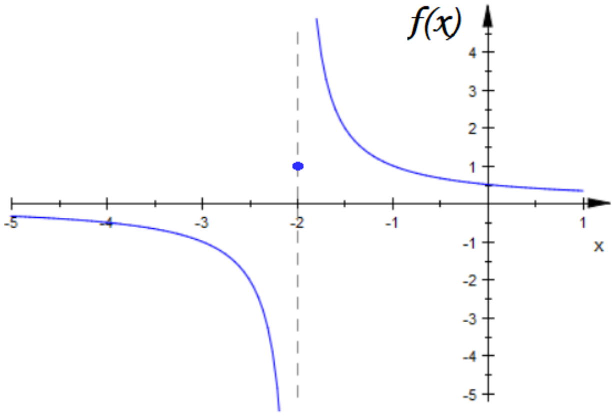
- $x = -4;\ pues\ \nexists\ \lim_{x \to -4} f(x)$, ya que el $\lim_{x \to -4^-} f(x) = \nexists$
- $x = -2;\ pues\ \nexists\ \lim_{x \to -2} f(x)$
- $x = 2;\ pues\ \nexists\ \lim_{x \to 2} f(x)$
- $x = 4;\ pues\ \nexists\ \lim_{x \to 4} f(x)$
- $x = 6;\ pues\ \nexists\ \lim_{x \to 6} f(x)$
- $x = 8;\ pues\ la\ función\ no\ esta\ definida\ en\ x = 8, es\ decir, f(8) = \nexists$

b) Intervalos de continuidad:

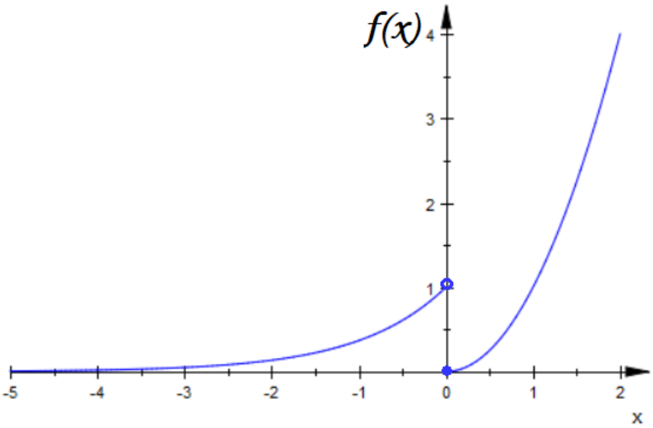
I₁ = $[-4, -2)$
I₂ = $(-2, 2)$
I₃ = $[2, 4)$
I₄ = $(4, 6)$
I₅ = $(6, 8)$

Ejercicio 4:

a) $f(x)$ es discontinua en $a = -2$ ya que $\nexists \lim_{x \to -2} f(x)$.

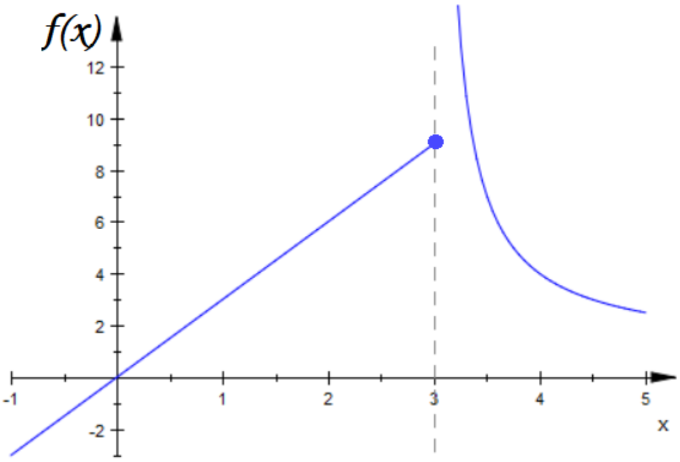


b) $f(x)$ es discontinua en $a = 0$ ya que $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$.

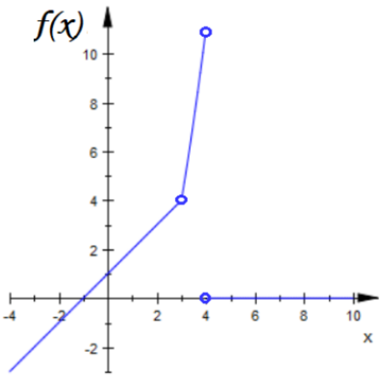


Ejercicio 5:

a) $f(x)$ presenta una discontinuidad en el valor $x = 3$ ya que $\nexists \lim_{x \to 3} f(x)$. La discontinuidad en $x = 3$ se clasifica como una discontinuidad inevitable de salto infinito.



b) $f(x)$ presenta dos discontinuidades. Una discontinuidad para el valor $x = 3$ ya que $f(x)\ no\ esta\ definida\ para\ x = 3$. La discontinuidad en $x = 3$ se clasifica como una discontinuidad evitable. La otra discontinuidad se presenta para el valor $x = 4$ ya que $f(x)\ no\ esta\ definida\ para\ x = 4$, se observa además que $\nexists \lim_{x \to 4} f(x)$. La discontinuidad en $x = 4$ se clasifica como una discontinuidad inevitable de salto finito.



Ejercicio 6:

a) $R(x)$ es una combinación de funciones continuas y en consecuencia es continua en su dominio (teorema 4 y 7, p. 121 y 123).

$\boldsymbol{Dominio\ de\ R(x) = R}$.

b) $G(x)$ es una función racional que es continua siempre que esté definida; esto es, es continua en su dominio (teorema 4 y 5, p. 121 y 122).

$\boldsymbol{Dominio\ de\ G(x) = R - \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}}$.

c) $B(x)$ es un cociente cuyo numerador, una función exponencial, es continua en su dominio y cuyo denominador, una composición de funciones continuas, es continua en su dominio. Por ende, $B(x)$ es continua en su dominio (teoremas 4, 7 y 9, p. 121, 123 y 125).

$\boldsymbol{Dominio\ de\ B(x)} = \{\boldsymbol{x \in R / -2} < x < 2\}$.

Ejercicio 7:

a) 2

b) $1/9$

c) -1

Ejercicio 8:

Los límites pueden describirse de la siguiente manera:

a) Los valores de $f(x)$ pueden aproximarse arbitrariamente a 5, cuando x toma valores positivos lo suficientemente grandes.

b) Los valores de $f(x)$ pueden aproximarse arbitrariamente a 3, cuando x toma valores positivos lo suficientemente grandes.

Ejercicio 9:

a) La intersección de dos curvas, por definición, es la característica de tener un punto (a, b) en común.

En la siguiente función $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}-3} & \mathrm{si\ x} > 3 \\ 3\mathrm{x} & \mathrm{si\ x} \leq 3 \end{cases}$ podemos observar lo siguiente:

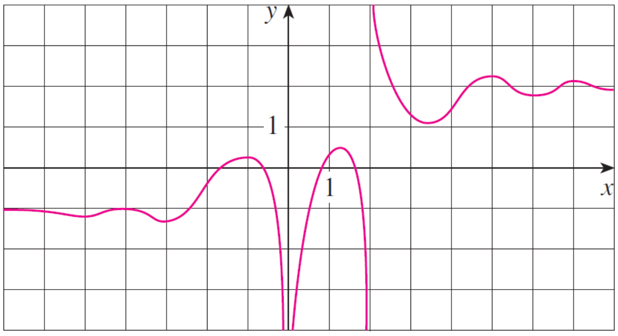
1) El $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 3^+} \mathrm{f(x)} = \infty$, por lo que $\mathrm{x} = 3$ es una asíntota vertical (Cumple con la definición de asíntota vertical). Por lo cual, esa asíntota, está formada por los infinitos puntos de la forma $(3, \mathrm{y}_0)$.

2) $\mathrm{f(x)}$ está definida en $\mathrm{x} = 3$, por lo que $\mathrm{f}(3) = 9$.

Como conclusión, la curva de $\mathrm{f(x)}$ y la asíntota vertical $\mathrm{x} = 3$ tienen un punto en común, el punto $(3, 9)$, por lo que si hay intersección.

Observación importante: Si la función está definida por una sola ley, entonces la curva no intersecará a las asíntotas verticales.

b) Si ocurre que el $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces podemos afirmar que $y = L$ será asíntota horizontal. Eso quiere decir, que cuando x toma valores extremadamente grandes (o pequeños si es a $-\infty$) la función se aproximará al valor L, sin llegar a valer exactamente L. Pero la definición de asíntota horizontal nada dice respecto a qué valores puede tomar la función en valores finitos. Por ejemplo



Ahí podemos observar que y=2 es asíntota horizontal, ya que cumple con la definición, pero la función corta a esa asíntota en reiteradas oportunidades.

Ejercicio 10:

Las funciones pueden tener, a lo sumo, sólo dos asíntotas horizontales, que por definición son:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$$

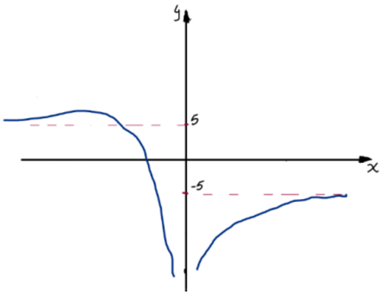
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$$

Ejercicio 11:

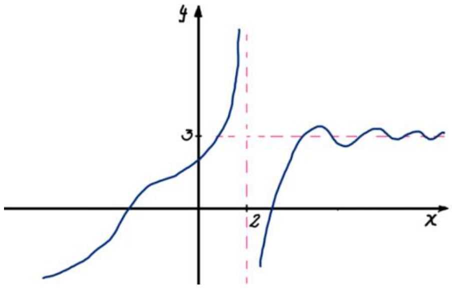
a) 2
b) -1
c) $-\infty$
d) $-\infty$
e) $+\infty$
f) $\mathrm{A.H}\ y = -1 \quad y = 2 \quad \mathrm{A.V}\ x = 0 \ \ x = 2$

Ejercicio 12:

a)



b)



Ejercicio 13:

a) 0
b) -1
c) ∞
d) No existe

Ejercicio 14:

a) $A.H: y = 1/2$
$A.V: x = 0, x = 1, x = -1$
b) $A.H: y = -1$
$A.V: x = 2, x = -1/2.$
c) $A.H: y = 2, si\ x\ tiende\ a\ +\infty.$
$A.H: y = 0, si\ x\ tiende\ a\ -\infty$
$A.V: x = ln\ 5.$

Ejercicio 15:

a) F b) V. c) F. d) F. e) V.

Ejercicio 16:

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{30t}{200+t} = 30.$La concentración es de 30 gr/L