Coloquio IV
Límites al Infinito y Asíntotas Horizontales

Dr. Juan Felipe Restrepo
juan.restrepo@uner.edu.ar

Departamento Académico de Matemática
Cálculo en una Variable

UNER Facultad de Ingeniería

Introducción

Temas de clase:

1. Límites en el infinito y asíntotas horizontales.
   Sección 2.6 Pág. 130.

2. Límites infinitos en el infinito.
   Sección 2.6 Pág. 136.

Definición: (Pág. 94 Stewart (2012))

Asíntota vertical:

La recta $x = a$ se llama asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si al menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Definición: (Pág. 130 Stewart (2012))

Límite en el infinito:

Sea la función f definida sobre un intervalo (a, ∞), entonces:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Definición: (Pág. 130 Stewart (2012))

Límite en el infinito:

Sea la función f definida sobre un intervalo (a, ∞), entonces:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden acercarse arbitrariamente a L si se elige un valor de x suficientemente grande.

Definición: (Pág. 131 Stewart (2012))

Límite en el infinito:

Sea la función f definida sobre un intervalo $(-\infty, a)$, entonces:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden acercarse arbitrariamente a L haciendo x negativa y suficientemente grande en magnitud.

Definición: (Pág. 131 Stewart (2012))

Asíntota horizontal:

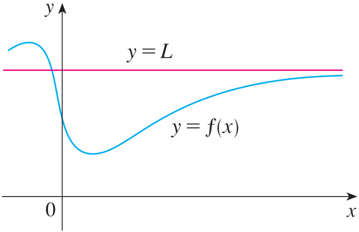
La recta

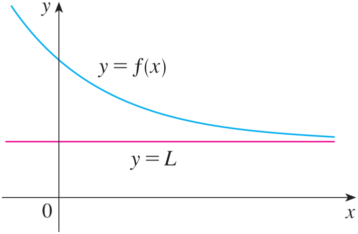
$$y = L$$

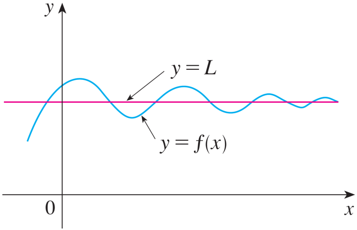
se llama asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Límites en el infinito







Límites en el infinito

Limite infinito en el infinito:

- La notación:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

  indica que los valores de $f(x)$ se hacen más grandes cuando x se hace muy grande.

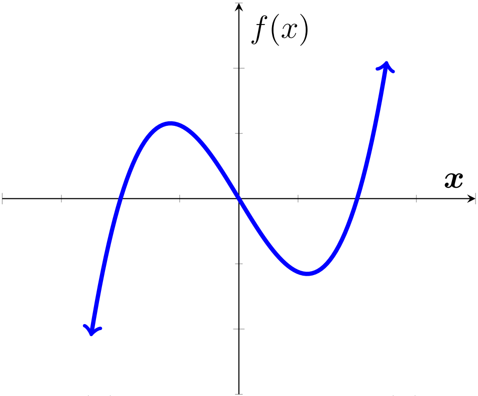
- La notación:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

  indica que los valores de $f(x)$ se hacen negativos y más grandes en magnitud cuando x se hace muy grande.

Límites en el infinito

$$f(x) = 3x(x-1)(x+1)$$

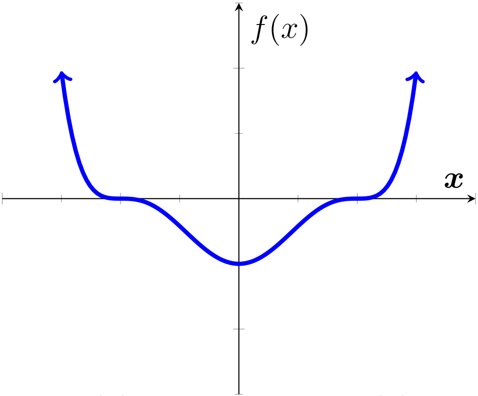


$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Facultad de Ingeniería UNER

Límites en el infinito

$$f(x) = (x+1)^3 (x-1)^3$$

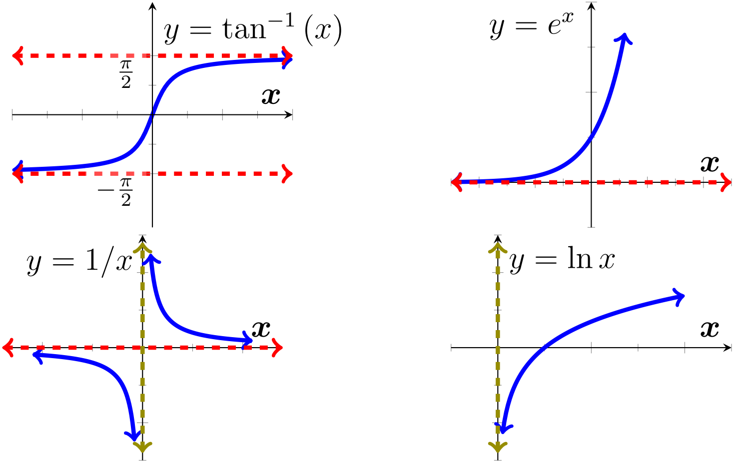


$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Límites en el infinito

Ejercicio:

Para cada una de las siguientes funciones determinar el $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ y el $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.



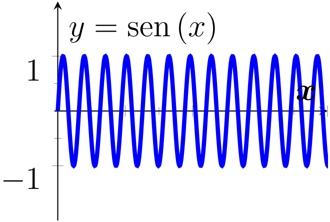
Facultad de UNER Ingeniería

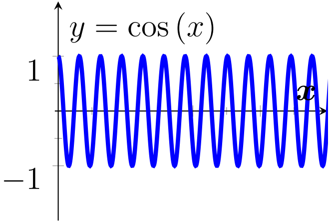
Límites en el infinito de funciones trigonométricas

Los límites

$$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \cos x$$

no están definidos.





Límites en el infinito de funciones trigonométricas

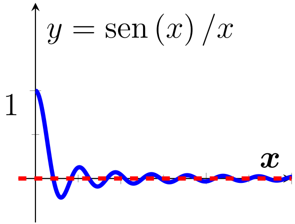
Los límites

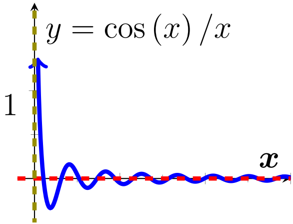
$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \cos x$$

no están definidos.

Pero:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$





Límites en el infinito de funciones racionales

Teorema: (Pág. 133 Stewart (2012))

Si $r > 0$ es un número racional, entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Si $r > 0$ es un número racional tal que x^r está definida para toda x, entonces

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Límites en el infinito de funciones racionales

Calcular:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

Ejercicios

Ejercicios:

Resolver cada uno de los siguientes límites:

1. $\lim_{t \to -\infty} e^{-2t}$.
2. $\lim_{\theta \to \infty} \frac{\sin(3\theta)}{\theta} + \frac{5}{\theta^2}$.
3. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x+2} - x$.
4. $\lim_{z \to -\infty} \frac{\sqrt{z^2+1}}{3z-5}$.

Referencias

Stewart, J., 2012. Cálculo de varias variables trascendentes tempranas, 7ma edición. Cengage Learning Editores.