Facultad de Ingeniería

Cálculo en una Variable

Bioingeniería
Licenciatura en Bioinformática
Ingeniería en Transporte

Tema: Derivada (Parte I)

Sección 2.1: Problema de la tangente y la velocidad

Sección 2.7: Derivadas y razones de cambio

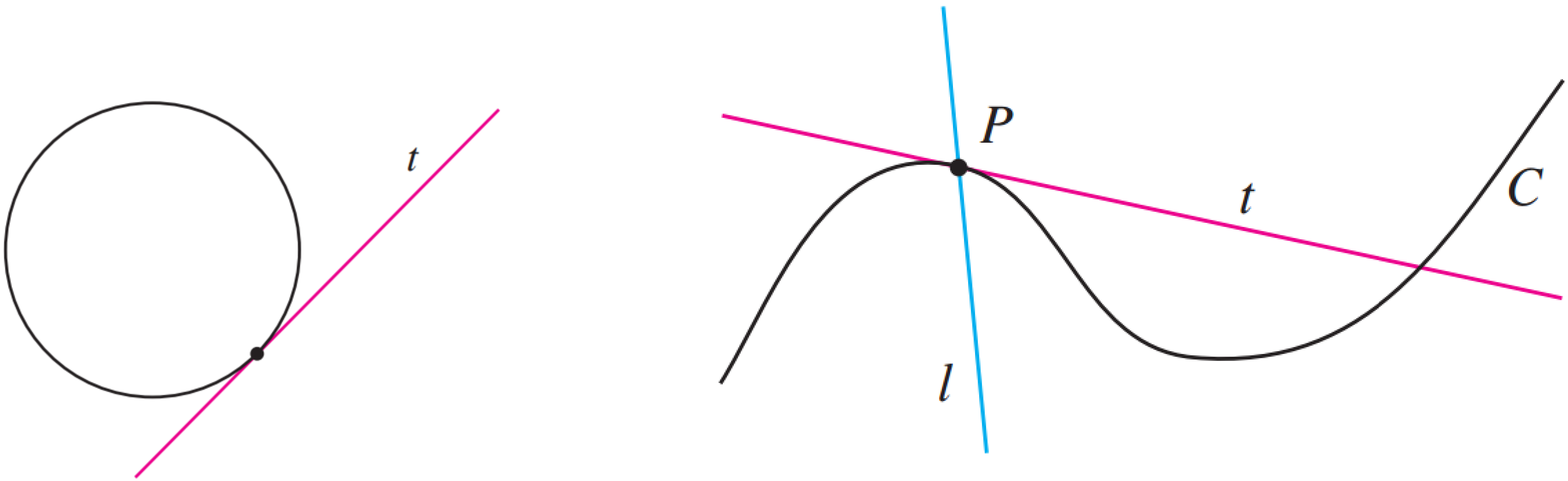
Sección 2.8: La derivada como función

Dos problemas con el mismo tema

- Nuestro primer problema es muy antiguo; se remonta a la época del gran científico griego Arquímedes (287-212 A. C.) Nos referimos al problema de la *pendiente de la recta tangente*.

- Nuestro segundo problema es más reciente. Surgió con los intentos de Kepler (1571-1630), Galileo (1564-1642), Newton (1642-1727) y otros para describir la velocidad de un cuerpo en movimiento. Es el problema de la *velocidad instantánea*.

Problema de la recta tangente

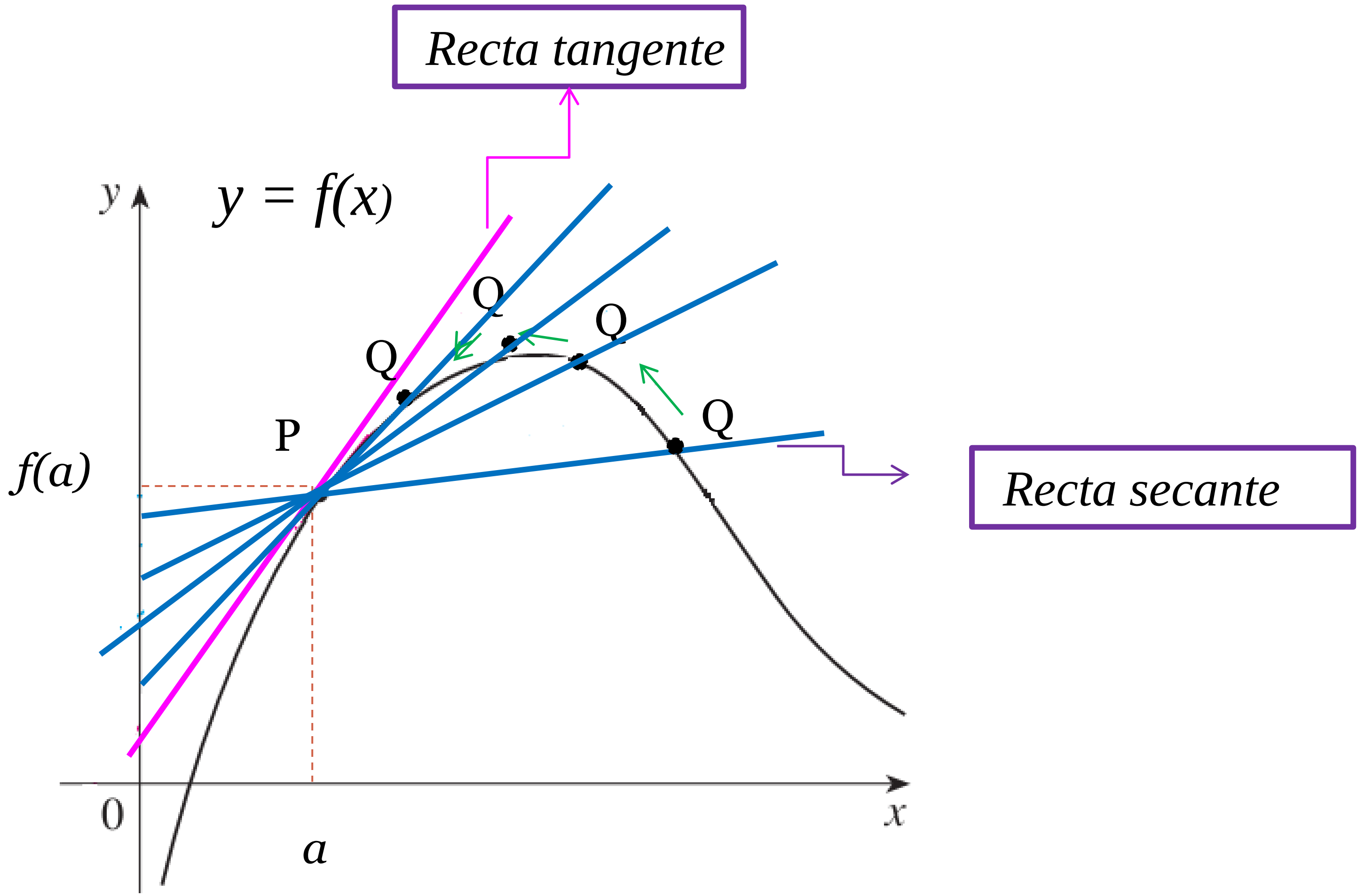


Problema de la recta tangente

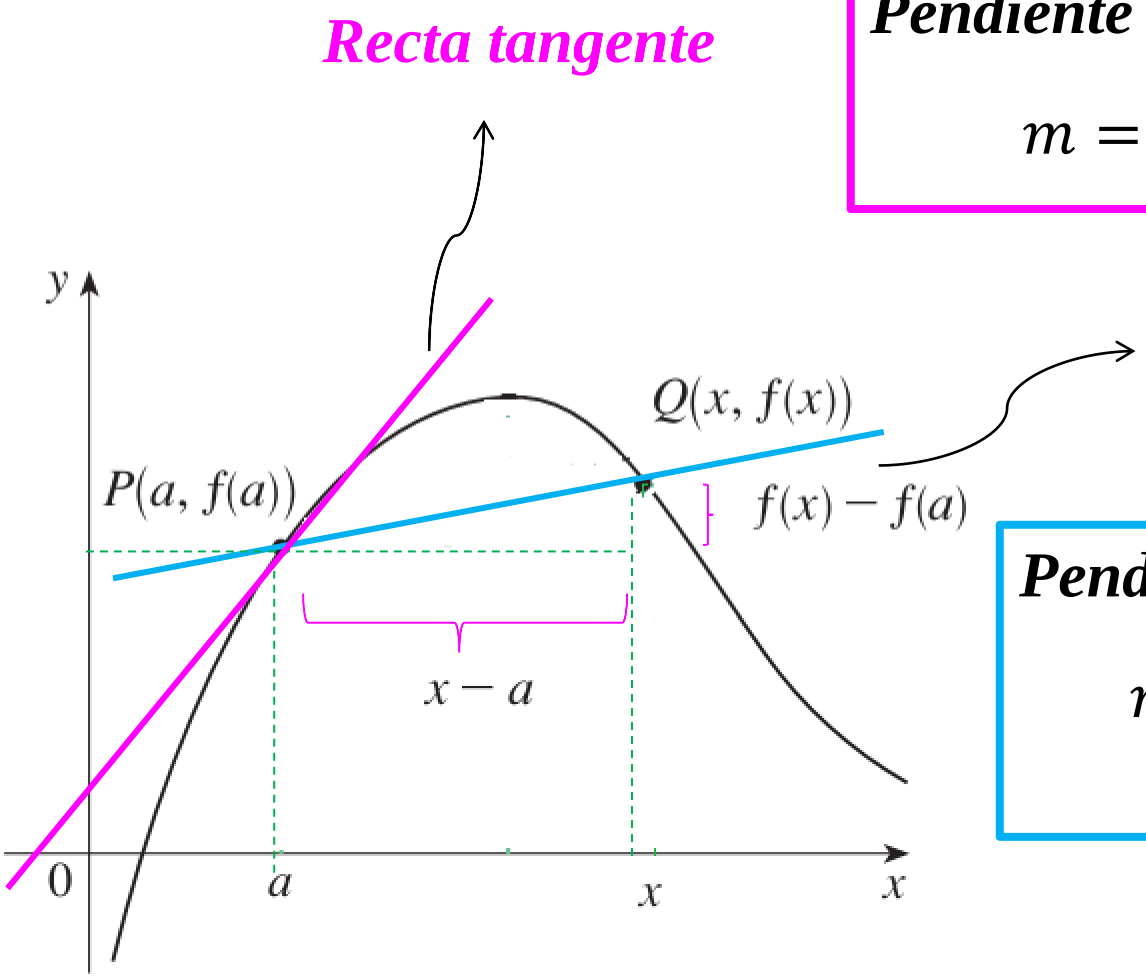
¿Cómo determinamos la recta tangente?

Recta tangente

Primero determinaremos la pendiente de la recta tangente



Recta tangente



Pendiente de la recta tangente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Pendiente de la recta secante

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Recta tangente

Definición

La ***recta tangente*** a la curva *y*= *f(x)* en el punto P*(a,f(a))* es la recta que pasa por *P* con pendiente

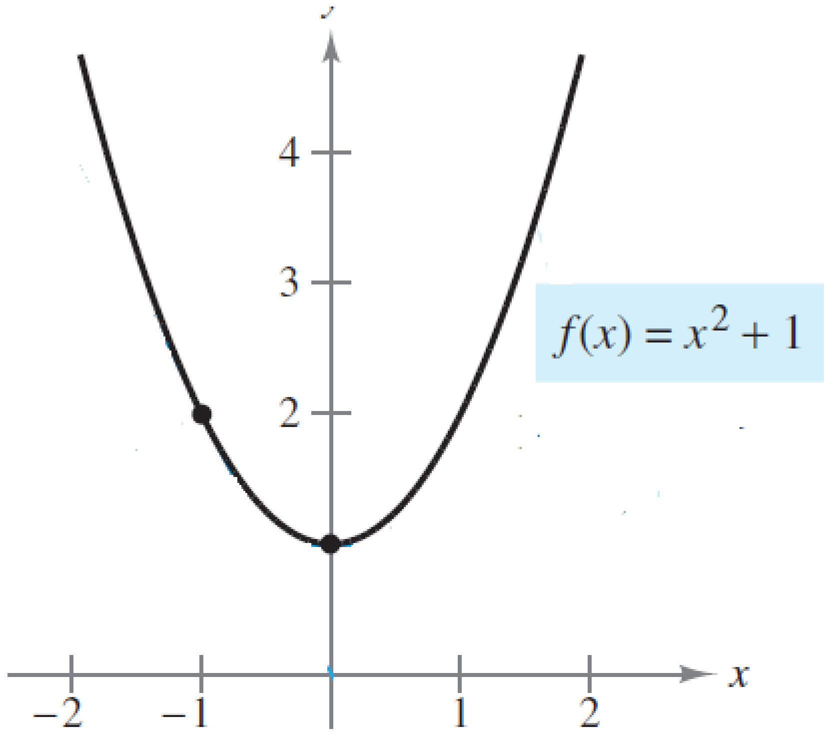
$$\boxed{m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

siempre que ese límite exista.

Recta tangente

Ejemplo:

Calcular la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$ en los puntos (-1,2) y (0,1)



Solución:

Definición
La pendiente de la ***recta tangente*** a la curva *y*= *f(x)* en el punto P(*a,f(a)*) *es*

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que ese límite exista.

Definición
Ecuación de la recta
Punto $P(x_0, y_0)$- Pendiente m

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

En (1,2).

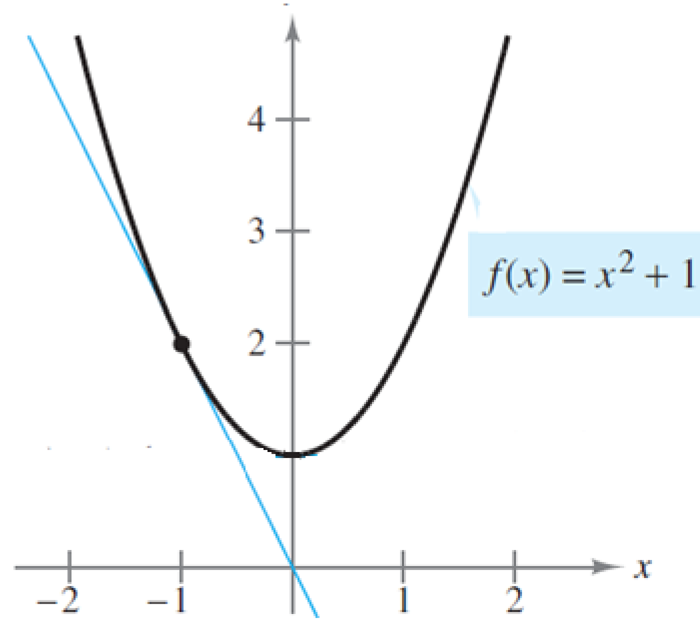
En este caso a = -1 y $f(x) = x^2 + 1$, entonces la ***pendiente*** de la recta tangente es

$$m = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 1 - (1 + 1)}{x + 1} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -2$$

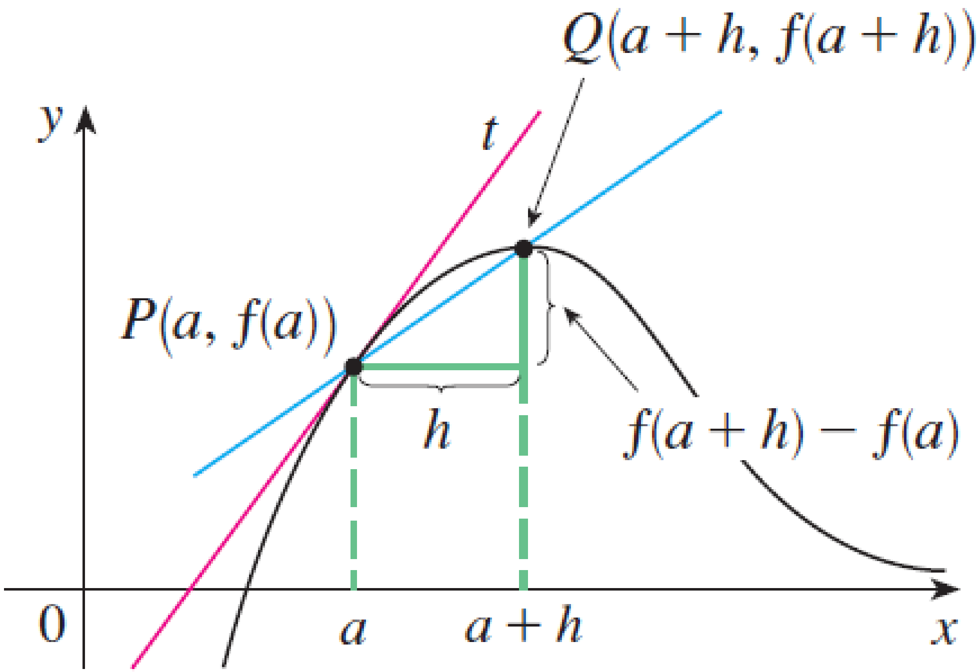
y la ecuación de la ***recta tangente*** es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 2 = -2(x + 1)$$
$$y = -2x$$



Recta tangente

Otra forma de expresar la pendiente de la recta tangente



Pendiente recta secante

$$m_{pq} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Pendiente recta tangente

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Definición

La pendiente de la ***recta tangente*** a la curva $y = f(x)$ en el punto P$(a, f(a))$ *es*

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que ese límite exista.

Definición

Ecuación de la recta

Punto $P(x_0, y_0)$- Pendiente m

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Solución:

En este caso $a = 0$ y $f(x) = x^2 + 1$, entonces la pendiente de la recta tangente es

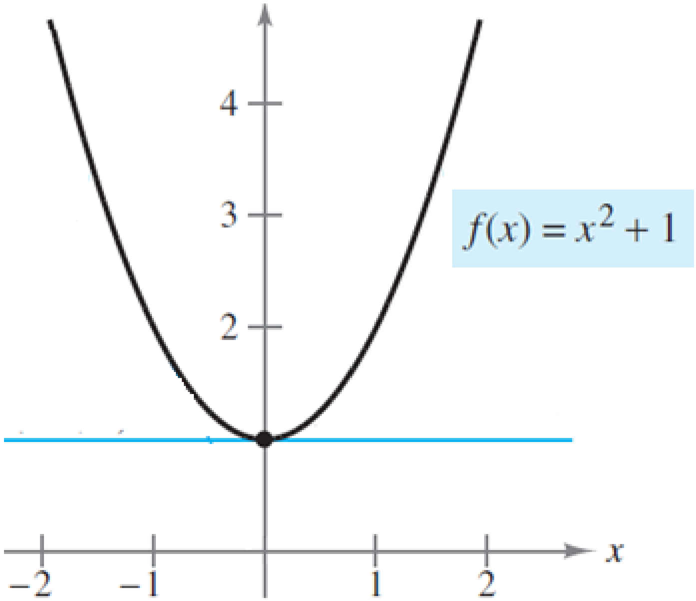
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 1 - (0+1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

y la ecuación de la ***recta tangente*** es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = 0(x - 1)$$

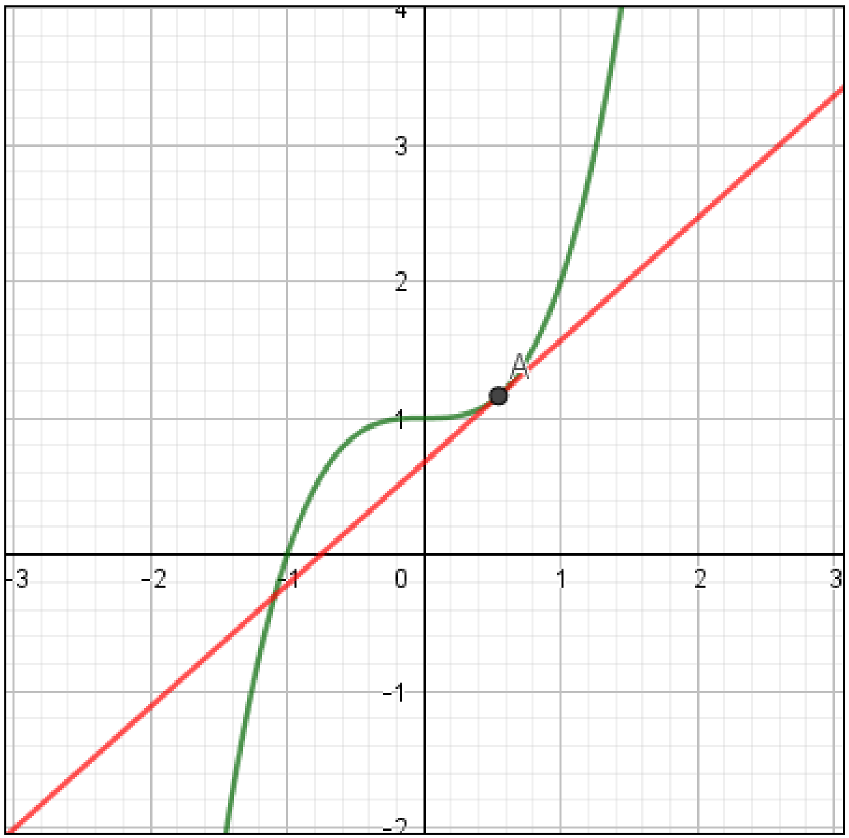
$$y = 1$$



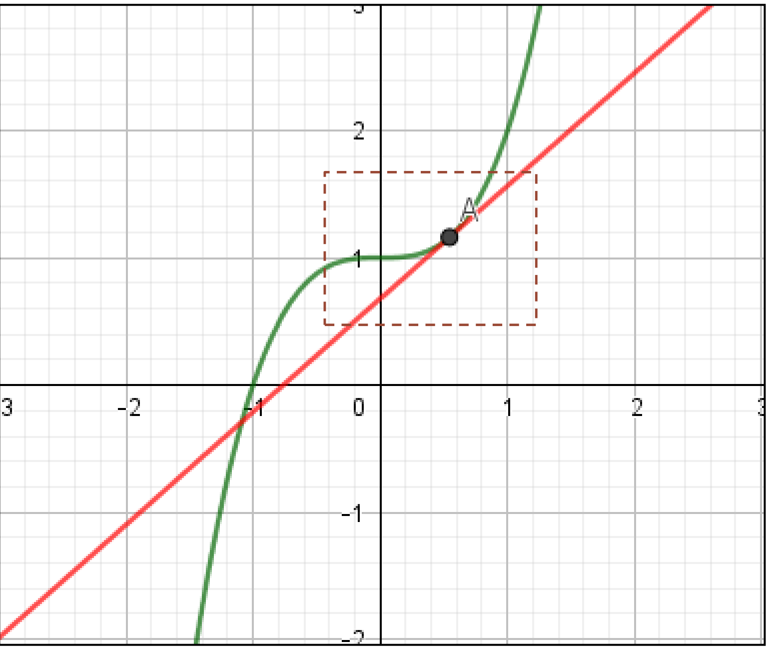
Problema de la recta tangente

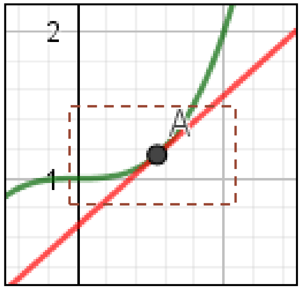
tangente.ggb

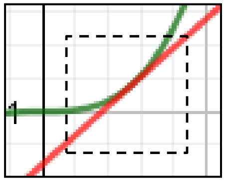
Problema de la recta tangente

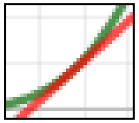


Problema de la recta tangente









Cuando más nos acercamos a la curva más se parece a una recta.

Pendiente de la curva es la pendiente de la recta tangente

El problema de la velocidad

Problema Supongamos que una pelota se deja caer desde la plataforma superior de observación de la Torre CN en Toronto, a 450 m sobre el suelo. Encuentre la velocidad de la pelota después de 5 segundos.

Distancia de caída libre después de t segundos $s(t) = 4.9t^2$

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1}$$

$$= \frac{4.9(5.1)^2 - 4.9(5)^2}{0.1} = 49.49 \text{ m/s}$$

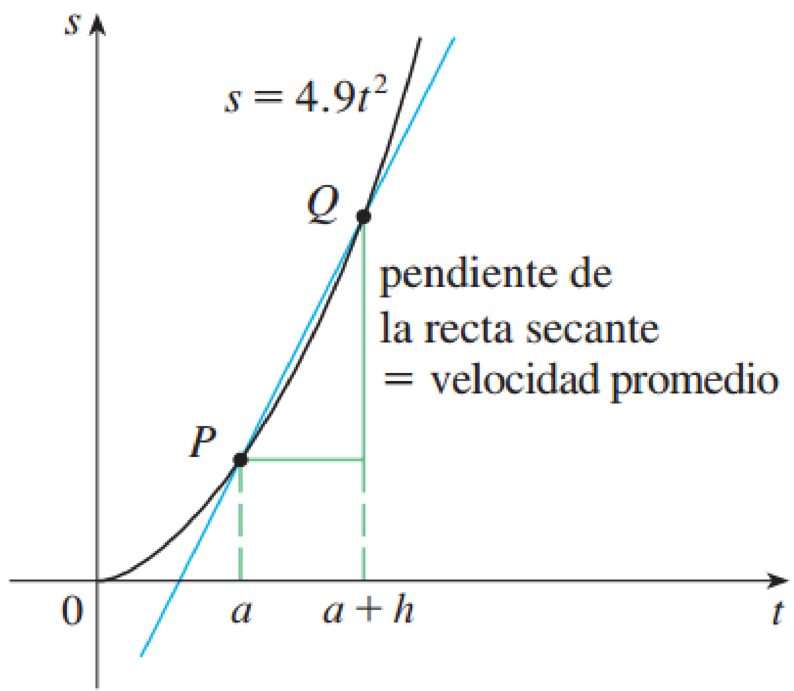
Intervalo de tiempo	Velocidad promedio (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53.9
$5 \leqslant t \leqslant 5.1$	49.49
$5 \leqslant t \leqslant 5.05$	49.245
$5 \leqslant t \leqslant 5.01$	49.049
$5 \leqslant t \leqslant 5.001$	49.0049

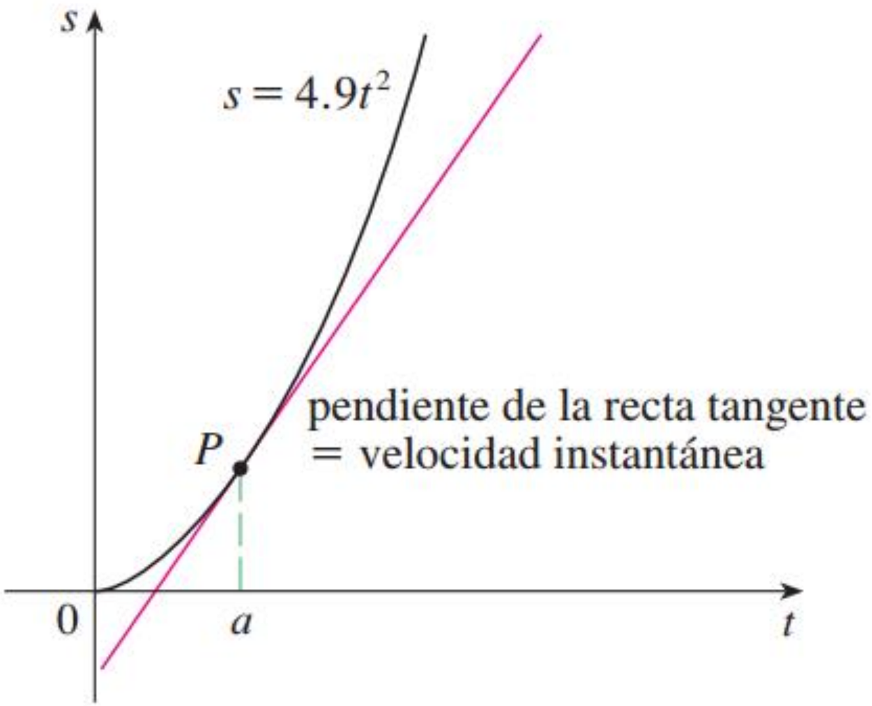
Velocidad instantánea

$$\boxed{v = 49 \text{ m/s}}$$

Problema de la velocidad instantánea

Si dibujamos la función distancia recorrida por la pelota





Pendiente de la recta secante

Pendiente de la recta tangente

$$m_{pq} = \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h} = v(a)$$

Velocidad media en el intervalo $[a, a+h]$

Velocidad en el instante $t=a$

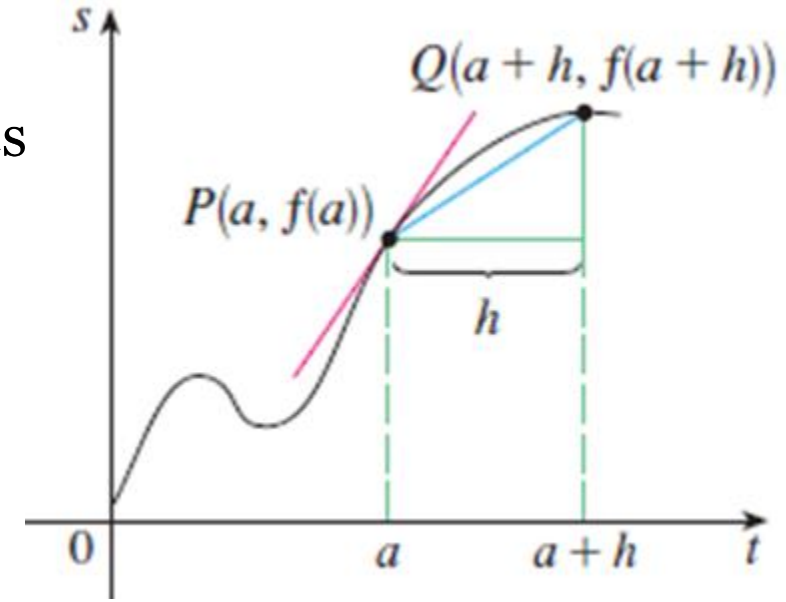
Velocidad promedio - Velocidad instantánea

Si un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, la ecuación del movimiento es

$$s = f(t) \quad \textbf{\textit{función posición}}$$

donde: ***s*** , desplazamiento del objeto respecto al origen .

t tiempo



Velocidad promedio en el intervalo de tiempo [a, a+h]

$$\boxed{velocidad\ promedio = \frac{desplazamiento}{tiempo} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

La velocidad o velocidad instantánea v(a) en el instante t = a

$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Derivada

Definición

La ***derivada*** *de una función f en un número x* = *a*, denotada por *f ′(a)*, es

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

si este límite existe.

Otra notación

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Si reemplazamos ***a*** con una variable ***x***

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

la ***derivada de f***

Ejemplo

Hallar la derivada de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

Definición

La ***derivada*** de una función *f(x)* en el número *x=a* *es*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que ese límite exista.

Solución:

Sea $f(x) = x^2 + 1$, entonces la derivada es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2+1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Por lo tanto

$$f'(x) = 2x$$

Otras notaciones

Notación de Leibniz

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

RELACIÓN: Derivada – Pendiente –Taza de cambio

Derivada de f en a

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Pendiente recta tangente en x = a

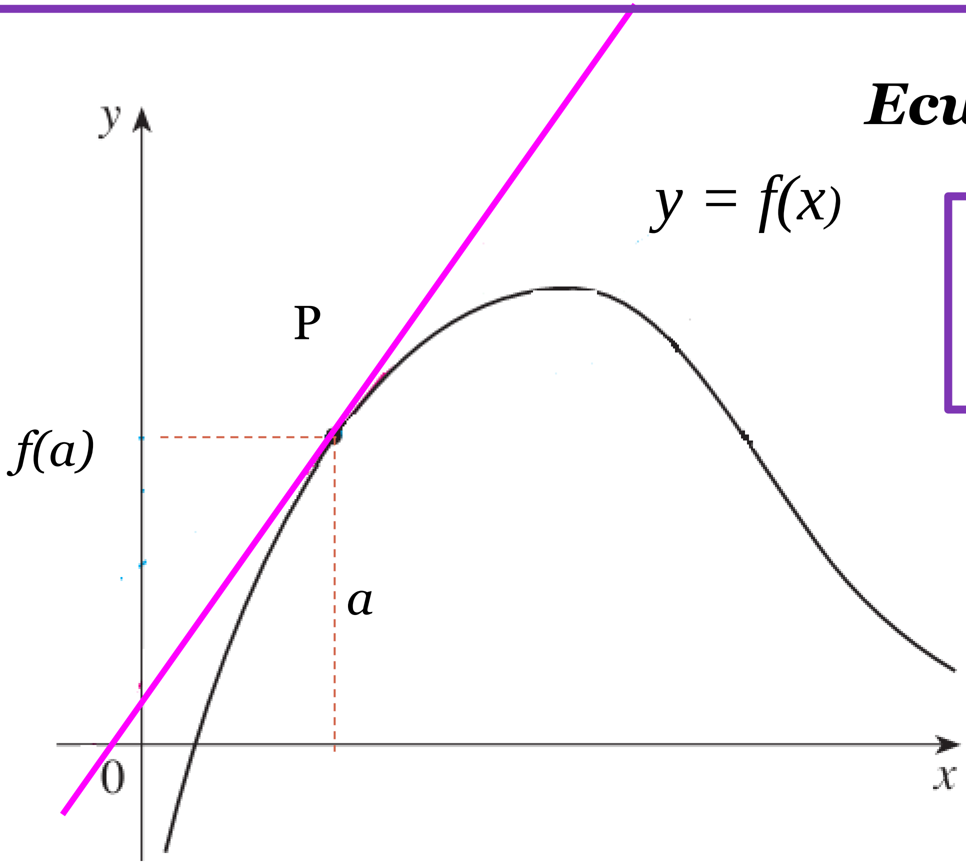
$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Velocidad instantánea en t = a

$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Recta tangente - derivada

La ***recta tangente*** a $y = f(x)$ en el punto P$(a, f(a))$ es la recta que pasa por P cuya pendiente es igual a $f\,'(a)$, la derivada de f en $x = a$.



Ecuación de la recta tangente

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Derivabiliad en un intervalo

Definición

Una función f es ***derivable en $x = a$*** si $f'(a)$ existe.

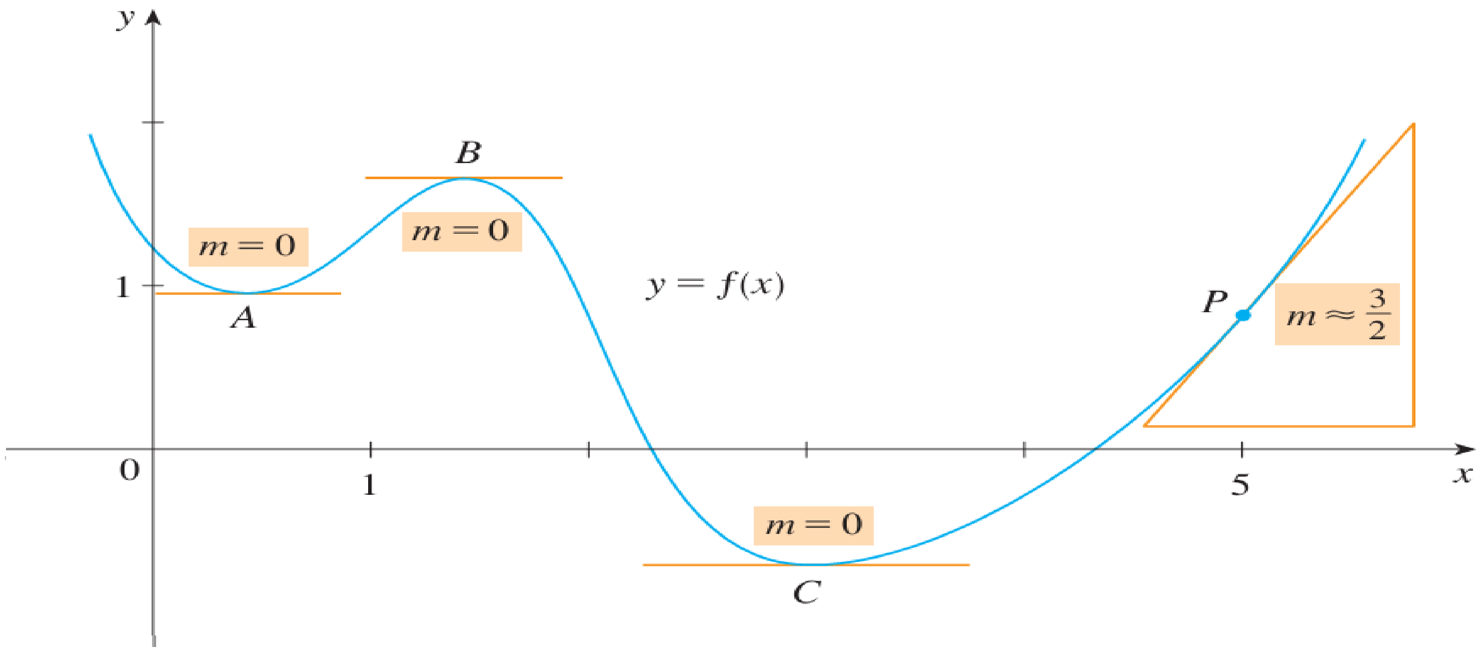
Definición

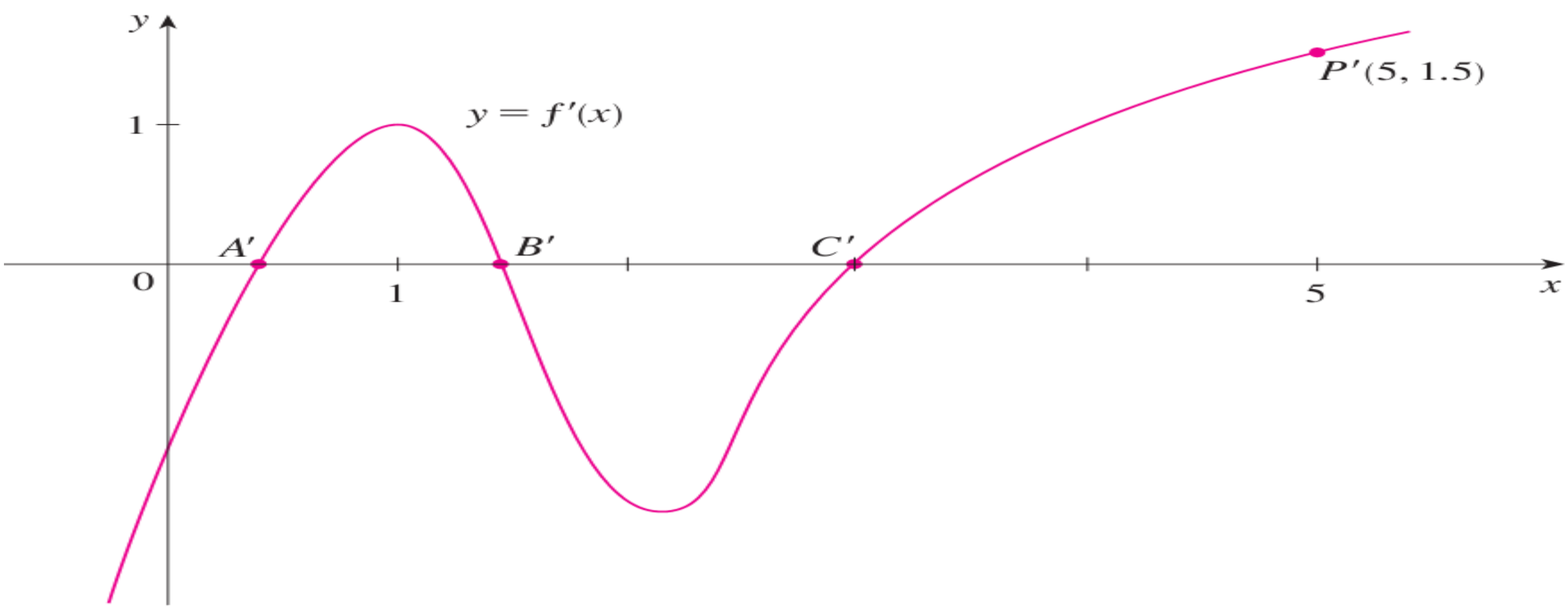
Una función f es ***derivable sobre un intervalo abierto*** (a,b) *si es derivable en todo número del intervalo.*

De forma similar para los intervalos: (a,∞) , $(-\infty, b)$ o $(-\infty, \infty)$

Relación : f y f´

Ejemplo: Utilice la gráfica de *f* para dibujar la gráfica de *f'*.





Derivabilidad - Continuidad

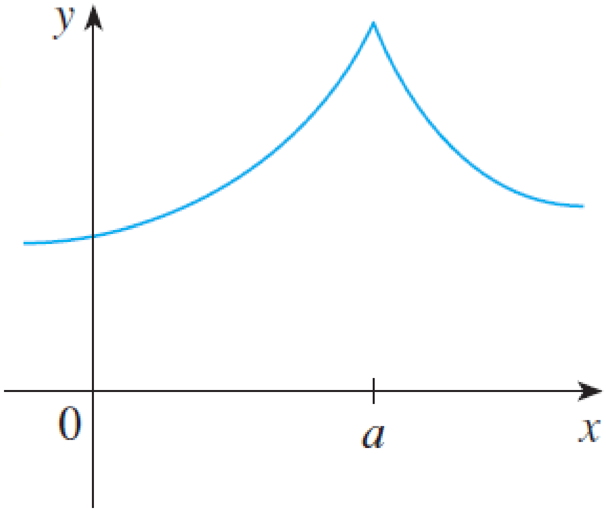
Teorema:

Si $\underbrace{f \text{ es } \textbf{derivable en } x = a}_{\textit{Hipótesis}}$, *entonces* $\underbrace{f \textbf{ es continua en } x = a}_{\textit{Tesis}}$.

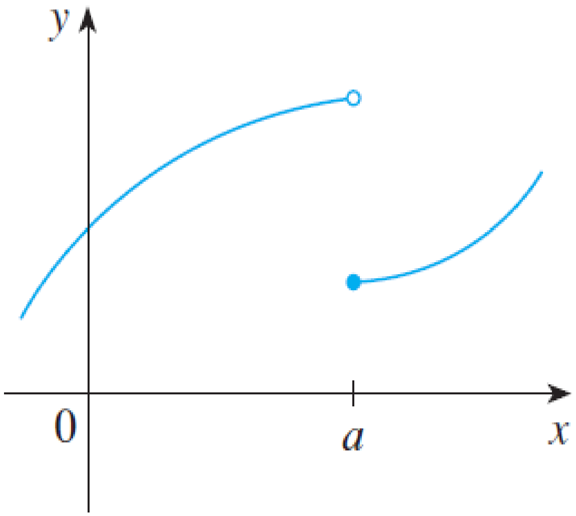
Derivabilidad $\longrightarrow$ **Continuidad**

Continuidad $\not\longrightarrow$ **Derivabilidad**

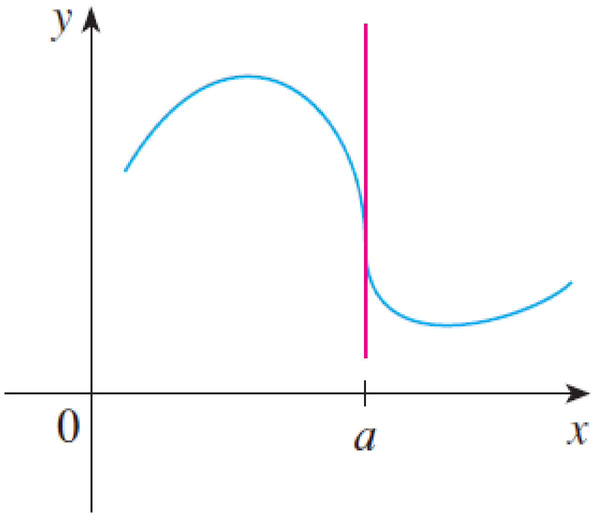
¿ Dónde no es derivable ?



Una esquina o pico

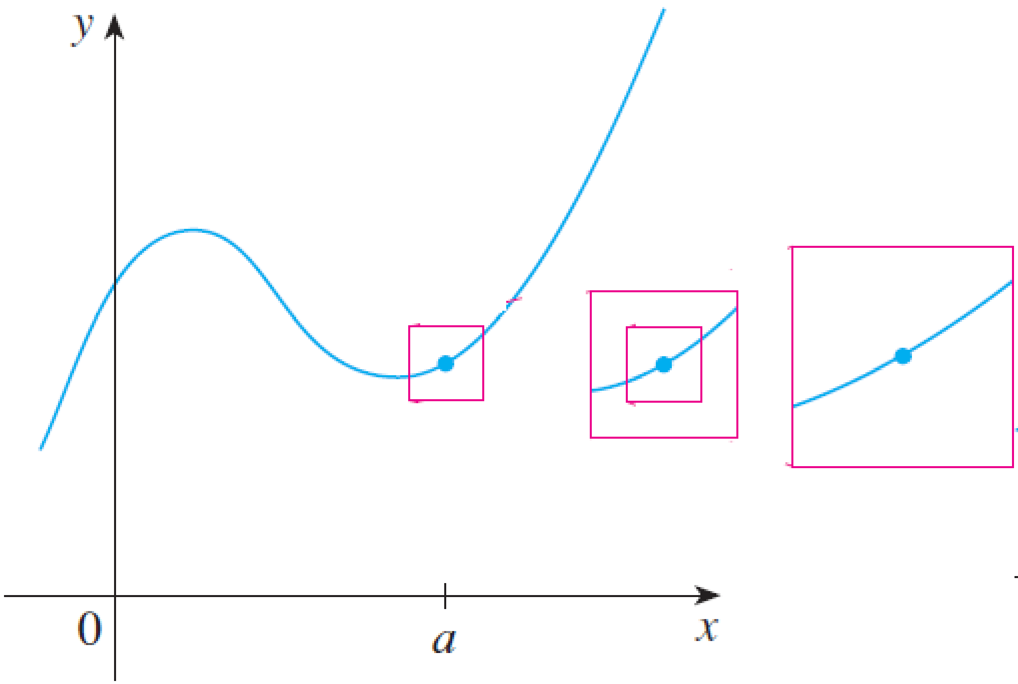


Una discontinuidad

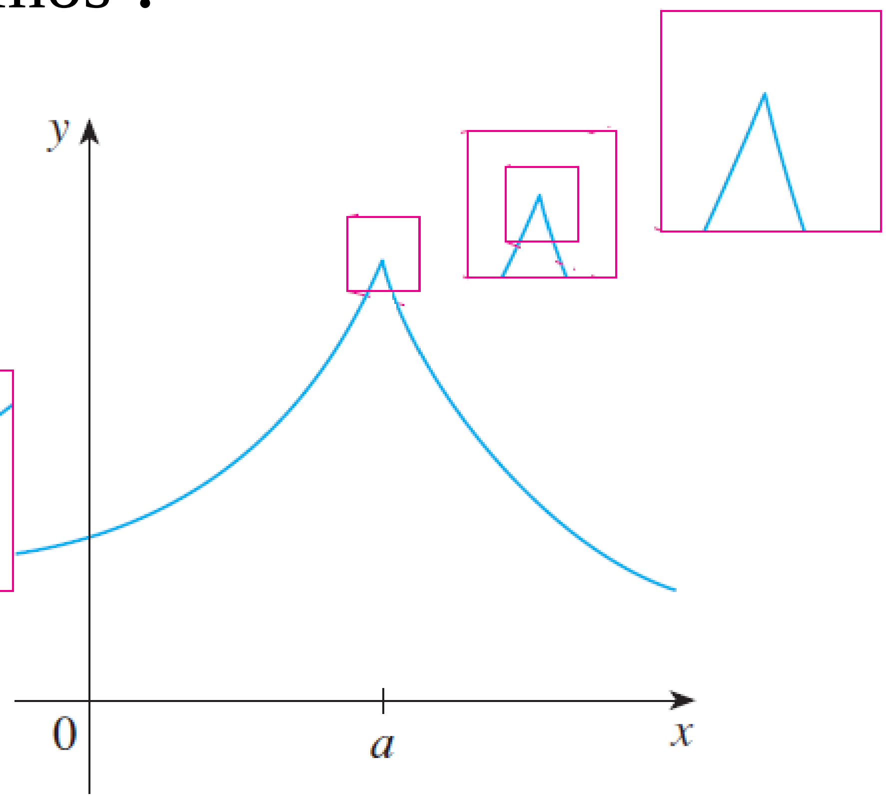


Una tangente vertical

¿ Qué observamos ?



f es derivable en $x = a$.



f no es derivable en $x = a$.

Derivadas de funciones – Reglas de derivación

Derivada de una función constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Regla de la potencia Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Regla de la potencia (versión general) Si n es cualquier número real , entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Derivadas de funciones – Reglas de derivación

Derivada de la función exponencial

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Derivada de la función exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Derivada de la función logaritmo

$$\frac{d}{dx}(log_a(x)) = \frac{1}{x \ln a}$$

Derivada de la función logaritmo natural

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

Reglas de derivación

Regla del múltiplo constante Si c es una constante y f es una función derivable, *entonces*

$$\frac{d}{dx}[c\, f(x)] = c\frac{d}{dx}\, f(x)$$

Regla de la suma Si f y g son derivables , entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

Regla de la resta Si f y g son derivables , entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

Reglas de derivación

Regla del producto Si f y g son derivables , entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Regla del cociente Si f y g son derivables , entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Derivadas de funciones – Reglas de derivación

Derivada de las funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(sen\ x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(csc\ x) = -csc\ x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(cos\ x) = -sen\ x \qquad \frac{d}{dx}(sec\ x) = sec\ x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(tan\ x) = sec^2(x) \qquad \frac{d}{dx}(cot\ x) = -csc^2\ x$$

Tabla de fórmulas de derivación

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'$$

$$(f.g)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

Bibliografía

- STEWART, James, (2012): *"Cálculode una variable- Trascendentes y tempranas"* - 7ma edición - Cengage – Learning – México.