Coloquio II
Reglas de derivación,
Derivada de funciones trigonométricas
y
Derivadas de orden superior

Dr. Juan Felipe Restrepo
juan.restrepo@uner.edu.ar

Departamento Académico de Matemática
Cálculo en una Variable

Introducción
Reglas de derivación
Derivada de Funciones Trigonométricas
Derivadas de orden superior
Referencias

Introducción

Temas de clase:

1. Reglas de derivación.

   Secciones 3.1-3.2 Págs. 174-190.

2. Derivada de funciones trigonométricas.

   Sección 3.3 Pág. 191.

3. Derivadas de orden superior.

   Sección 2.8 Pág. 160.

Introducción
Reglas de derivación
Derivada de Funciones Trigonométricas
Derivadas de orden superior
Referencias

Facultad de Ingeniería UNER

Definición: (Pág. 146 y 154 Stewart (2012))

Derivada de una función:

La derivada de una función $f(x)$, denotada por $f'(x)$, es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si el límite existe.

Ejemplo:

Encuentre la derivada por definición de la función:

$$f(x) = x^2$$

Introducción
Reglas de derivación
Derivada de Funciones Trigonométricas
Derivadas de orden superior
Referencias

Reglas de derivación

Definición: (Pág. 189 Stewart (2012))

Reglas de derivación:

Sea c una constante y f y g funciones derivables, entonces:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Reglas de derivación

Definición: (Pág. 189 Stewart (2012))

Reglas de derivación:

Sea c una constante y f y g funciones derivables, entonces:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$$

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c) = 0$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$

Introducción

Reglas de derivación

Derivada de Funciones Trigonométricas

Derivadas de orden superior

Referencias

Definición: (Pág. 189 Stewart (2012))

Reglas de derivación:

Sea c una constante y f y g funciones derivables, entonces:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$$

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c) = 0$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$

Reglas de derivación

Definición: (Pág. 189 Stewart (2012))

Reglas de derivación:

Sea c una constante y f y g funciones derivables, entonces:

$$(cf)' = cf'$$

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
3. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
4. $(cf)' = cf'$

Definición: (Pág. 189 Stewart (2012))

Reglas de derivación:

Sea c una constante y f y g funciones derivables, entonces:

$$(f+g)' = f' + g'$$

1. $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}(c) = 0$
2. $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
3. $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}(e^x) = e^x$
4. $(cf)' = cf'$
5. $(f+g)' = f' + g'$

Reglas de derivación

Definición: (Pág. 189 Stewart (2012))

Reglas de derivación:

Sea c una constante y f y g funciones derivables, entonces:

$$(fg)' = f'g + g'f$$

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c) = 0$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$
4. $(cf)' = cf'$
5. $(f+g)' = f' + g'$
6. $(fg)' = f'g + g'f$

Definición: (Pág. 189 Stewart (2012))

Reglas de derivación:

Sea c una constante y f y g funciones derivables, entonces:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

1. $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}(c) = 0$
2. $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
3. $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}(e^x) = e^x$
4. $(cf)' = cf'$
5. $(f+g)' = f' + g'$
6. $(fg)' = f'g + g'f$
7. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Definición: (Pág. 194 Stewart (2012))

Derivadas de funciones trigonométricas:

- $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}(\operatorname{sen} x) = \cos x$

Introducción
Reglas de derivación
Derivada de Funciones Trigonométricas
Derivadas de orden superior
Referencias

Definición: (Pág. 194 Stewart (2012))

Derivadas de funciones trigonométricas:

- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$

- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

Introducción
Reglas de derivación
Derivada de Funciones Trigonométricas
Derivadas de orden superior
Referencias

Derivada de funciones trigonométricas

Definición: (Pág. 194 Stewart (2012))

Derivadas de funciones trigonométricas:

- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$

- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

Introducción

Reglas de derivación

Derivada de Funciones Trigonométricas

Derivadas de orden superior

Referencias

Definición: (Pág. 194 Stewart (2012))

Derivadas de funciones trigonométricas:

- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$
- $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

Introducción
Reglas de derivación
Derivada de Funciones Trigonométricas
Derivadas de orden superior
Referencias

Reglas de derivación

Ejemplo:

Utilizando las reglas de derivación muestre que:

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}(\tan x) = \sec^2 x$$

Reglas de derivación

Ejercicio:

Calcular

$$\left(z^2 e^z + 5\sqrt{z} - 2\right)'$$

Reglas de derivación

Ejercicio:

Suponga que

$$h\left(x\right) = \frac{s(x)}{1+p(x)}$$

Encuentre $h'\left(3\right)$ teniendo en cuenta que:

- $p\left(3\right) = -2$
- $p'\left(3\right) = 4$,
- $s\left(3\right) = 2$
- $s'\left(3\right) = -4$

Derivadas de orden superior

- Si f es una función derivable, entonces f' también es una función.
- f' puede tener una derivada de sí misma denominada segunda derivada f''.

Notación:

$$f'' = (f')'$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)\right)$$

Derivadas de orden superior

- Si f es una función derivable, entonces f' también es una función.
- f' puede tener una derivada de sí misma denominada segunda derivada f''.

Notación:

$$f'' = (f')'$$

$$\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}x^2}(f) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}\left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}(f)\right)$$

En general: La n-ésima derivada de f se denota mediante $f^{(n)}$ y se obtiene derivando $\boldsymbol{n}$ veces a $\boldsymbol{f}$.

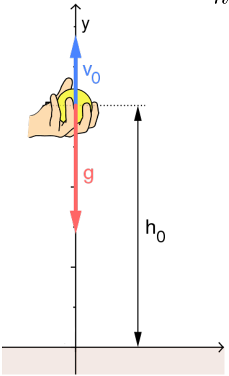
$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}x^n}(f).$$

Derivadas de orden superior

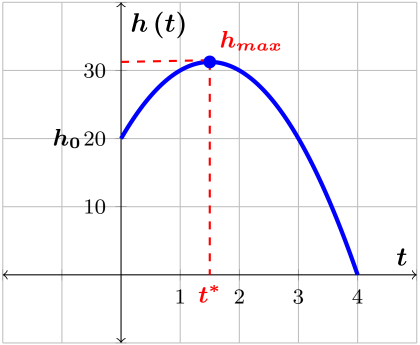
Ejemplo:

Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde una altura inicial h_0 con una velocidad inicial v_0. La altura h en función del tiempo t está dada por la función:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$



(a) Trayectoria



(b) Altura

Facultad de UNER Ingeniería

Ejemplo:

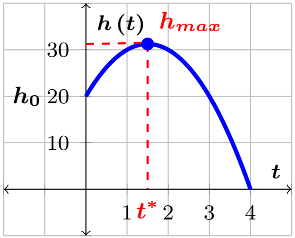
Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde una altura inicial h_0 con una velocidad inicial v_0. La altura h en función del tiempo t está dada por la función:

$$h\left(t\right) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

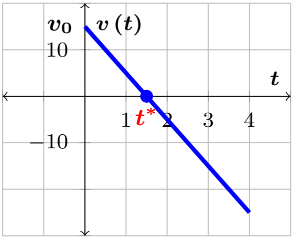
Para un objeto lanzado desde una altura de 20 m con una velocidad de 15 m/s.

1. Encuentre la altura del objeto para $t = 3$ s.
2. Encuentre el tiempo t para el cual el objeto está a 30 m de altura.
3. Encuentre la velocidad en $t = 1$ s.
4. Calcule el tiempo t para el cual la velocidad es cero.
5. Encuentre la segunda derivada de h e interprete físicamente.

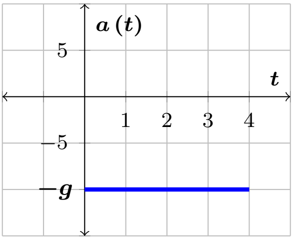
Derivadas de orden superior



$h(t) = 20 + 15t - 5t^2 \quad$ [m]



$v(t) = 15 - 10t \quad$ [m/s]



$a(t) = -10 \quad$ [m/s^2]

Ejercicios de Práctica

Ejercicios:

Muestre que la función $y = xe^x$ verifica la ecuación diferencial:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Referencias

Stewart, J., 2012. Cálculo de varias variables trascendentes tempranas, 7ma edición. Cengage Learning Editores.

Introducción

Reglas de derivación

Derivada de Funciones Trigonométricas

Derivadas de orden superior

Referencias