Resolución Guía Complementaria II

Ejercicio 1

Para la función $y = 4\ln(2 - e^{2x}) + 2$

a. Determine la recta tangente su gráfica en el punto (0; 2).

b. Encuentre, si existen, el/los puntos sobre su gráfica cuya recta tangente es horizontal.

Solución

a) La recta tangente en $x = x_o$ está dada por la ecuación $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$. Deerminamos la derivada y con ella la pendiente de la recta

$$y' = 4\frac{-2e^{2x}}{2 - e^{2x}} = \frac{-8e^{2x}}{2 - e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{-8e^{2(0)}}{2 - e^{2(0)}} = -8$$

Recta tangente: $y - 2 = -8(x - 0) \Rightarrow y = -8x + 2.$

b) Las rectas tangentes horizontales tienen pendiente 0 y la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función f la da su derivada, entonces determinaremos los valores x para los cuales la derivada es cero, $y'(x) = 0$.

$y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \frac{-8e^{2x}}{2-e^{2x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -8e^{2x} = 0$, como la función exponencial nunca es 0, entonces No existe un valor x que anule la derivada, por lo tanto No existen puntos en la gráfica donde la recta tangente sea horizontal.

Ejercicio 2

Derive cada una de las siguientes funciones:

Regla del cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$

Regla de la cadena: $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Regla del producto: $(f.g)' = f'.g + f.g'$

Regla de la cadena: $(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

a) $A(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 3x)}{x - 9}$

$$A'(x) = \frac{\frac{2x-3}{x^2-3x}(x-9) - \ln(x^2-3x).1}{(x-9)^2}$$

b) $y = \sqrt{x^3 - 3x}(x - 1)$

$$y' = \frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x}}(x - 1) + \sqrt{x^3 - 3x}.1 = \frac{3x^3 - 3x - 3x^2 + 3 + 2x^3 - 6x}{2\sqrt{x^3 - 3x}} = \frac{5x^3 - 3x^2 - 9x + 3}{2\sqrt{x^3 - 3x}}$$

c) $y(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}+x^2}{x^2-1}$

$$y'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}}+2x\right)(x^2-1)-\left(\sqrt{x-2}+x^2\right)2x}{(x^2-1)^2}$$

d) $y(x) = \dfrac{e^{x^2-x}}{\sqrt{x}}$

$$y´(x) = \frac{e^{x^2-x}(2x-1)\sqrt{x}-e^{x^2-x}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{e^{x^2-x}\left(2x\sqrt{x}-\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} =$$

$$= \frac{e^{x^2-x}\left(\frac{4x^2-2x-1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} = \frac{e^{x^2-x}(4x^2-2x-1)}{2x\sqrt{x}}$$

e) $y\ = \cos x^2 - x^2$

$y´\ = -\operatorname{sen} x^2 . 2x - 2x = -2x(\operatorname{sen} x^2 + 1)$

d) $y(x) = \dfrac{\ln x^3 - x}{e^{x-1}}$

$$y(x) = \frac{\left(\frac{3x^2}{x^3}-1\right)e^{x-1}-(\ln x^3 - x)e^{x-1}}{(e^{x-1})^2} = \frac{e^{x-1}\left(\frac{3}{x}-1-\ln x^3+x\right)}{(e^{x-1})^2} = \frac{\frac{3}{x}-1-\ln x^3+x}{e^{x-1}}$$

<u>**Ejercicio 3**</u>

a) Como $y(x) = e^2$ es una función constante, $y´(x) = 0$.
Conclusión: La afirmación es Falsa.

b) La expresión del lado derecho de la igualdad expresa la definición de $g´(2)$, como $g´(x) = 5x^4$ se sigue que $g´(2) = 5(2)^4 = 80$.
Conclusión: La afirmación es Falsa.

c) Si la derivada existe para todo x podemos asegurar que la función es derivable en el intervalo abierto (1, 3) y continua en el intervalo cerrado [1, 3], SE verifican las hipótesis del Teorema del valor medio, entonces existe un valor c en el intervalo (1, 3) tal que $f´(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{0-(-2)}{2} = 1$.
Es decir que $f´(x)$ no es mayor que 1 para todo ***x***.
Conclusión: La afirmación es Falsa.

d) Contraejemplo: Sea $f(x) = e^x$, su derivada, $f'(x) = e^x$, existe y es diferente de 0 para toda *x* y $f(0) \neq f(1)$.
Conclusión: La afirmación es Falsa.

e) Si $f'(r)$ existe entonces la función *f* es continua en *x* = *r* y por definición de continuidad se verifica que $\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$.
Conclusión: La afirmación es Verdadera.

f) Contraejemplo: Sea $f(x) = x^3$, por una parte la derivada segunda es:
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x^3)\right) = \frac{d}{dx}(3x^2) = 6x \quad (1)$
Y la primera derivada al cuadrado
$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d}{dx}(x^3)\right)^2 = (3x^2)^2 = 9x^4 \quad (2)$
Luego la expresión (1) es distinta de la expresión (2)
Conclusión: La afirmación es Falsa.

<u>Ejercicio 4:</u>

Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 - xy - y^2 = 2x$ en el punto P (2*;* 0).

Solución

Para determinar la recta tangente en el punto P(2,0) se calcula la pendiente evaluando la $\frac{dy}{dx}(2,0)$.
Como la ecuación es implícita se utiliza derivación implícita

$x^2 - xy - y^2 = 2x$ ´ derivo ambos miembros por *x*

$2x - y - xy' - 2yy' = 2$ asocio los términos que contienen y'

$2x - y + y'(-x - 2y) = 2$ despejo y'

$$y' = \frac{2-2x+y}{-x-2y}$$

$$y'(2,0) = \frac{2-2(2)+(0)}{-(2)-2(0)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

La ecuación de la recta tangente: $y - 0 = 1(x - 2)$

$$y = x - 2$$

<u>Ejercicio 5</u>

Encuentre el/los puntos, si existen, sobre la curva $y^2 + 2x^2 = 1$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución

El punto de una curva que tienen recta tangente horizontal es aquel donde la derivada evaluada en su abscisa es cero. Dado que estamos ante una expresión implícita se aplica derivación implícita para obtener *dy/dx*

$$y^2 + 2x^2 = 1$$

$$2y\, dy/dx + 4x = 0$$

$$dy/dx = \frac{-4x}{2y} = \frac{-2x}{y}$$

Igualando la derivada a cero tenemos $dy/dx = 0 \;\Rightarrow\; \frac{-2x}{y} = 0 \;\Rightarrow\; -2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$, reemplazando este valor en la ecuación (*) obtenemos la coordenada $\boldsymbol{y}$ de el/los puntos, $y^2 + 2(0)^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1$, así $y = 1$ y $y = -1$. Luego los puntos sobre la curva con recta tangente horizontal son: $P_1(0,1)$ y $P_2(0,-1)$.

Ejercicio 6

Determine el/los valores de m tal que la gráfica de la función $y = \frac{mx+1}{\sqrt{x}}$ tenga una recta tangente de pendiente 1 en x = 4.

Solución

Aplicamos las reglas de derivación

$$dy/dx = \frac{m\sqrt{x} - (mx+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

Si la pendiente de la recta tangente es 1 cuando $x = 4$, entonces y $y'(4) = 1$, reemplazando e igualando

$$\frac{m\sqrt{4} - (m.4+1)\frac{1}{2\sqrt{4}}}{4} = 1 \quad\Rightarrow\quad 2m - m - \frac{1}{4} = 4 \quad\Rightarrow\quad m = \frac{17}{4}$$

Ejercicio 7

Encuentre los puntos, si existen, sobre la curva $xy + e^x = y$ donde ***dy/dx*** no existe.

Solución

$$y + xy' + e^x = y' \;\Rightarrow y' = \frac{-e^x - y}{x-1}$$

De la expresión se sigue que no está definida para *x = 1*. Luego la derivada no existe en 1.

Ejercicio 8

Encuentre una función f y un número $x = a$ tales que

$$\lim_{x\to a} \frac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

Solución

De la definición $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ podemos observar que $f(a+h) = (2+h)^6$, se sigue que $f(x) = x^6$ y $a = 2$ ya que $f(a) = f(2) = 2^6 = 64$. Observar que $f(x) = x^6 + k$, con k constante también verifica la igualdad.

Ejercicio 9

En la figura 1 a) se muestra la gráfica de *f*. Enuncie los números *x* en los que *f* no es derivable y justifique por qué no lo es.

Solución

De la gráfica de f podemos observar que:

- La función no es derivable en - 4 porque no es continua en él.
- La función no es derivable en -1 porque la gráfica presenta un pico.
- En 2 la función no es derivable pues se observa que la recta x = 2 es una asíntota vertical.
- En 5 la función no es derivable pues si bien presenta una recta tangente, es vertical por lo tanto su pendiente no existe, es decir la derivada en 5 no existe.

Ejercicio 10

Calcular ***dy/dx*** para $y = x^{ln\,x}$.

Solución

$y = x^{ln\,x}$

$\ln y = \ln(x^{ln\,x})$ Aplico ln a ambos miembros.

$\ln y = \ln x \ln x$ Aplico propiedades de ln .

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\ln x + \ln x\ \frac{1}{x}$ Derivo respecto de *x*.

$y' = \frac{2\ln x}{x} x^{ln\,x}$

Ejercicio 11

Suponga que $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$ y $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$ y sea $g(x) = f(x)\ sen\,x$ y $h(x) = \frac{\cos x}{f(x)}$

a) Calcular $g'(\pi/3)$.
b) Halle la recta tangente a la gráfica de la función h en $x = \pi/3$.

Solución

a) $g'(x) = f'(x)\ sen\,x + f(x)\cos x$

$g'(\pi/3) = f'(\pi/3)\ sen\frac{\pi}{3} + f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 4.\frac{1}{2} = 2 + \sqrt{3}$.

b) $h'(x) = \frac{-sen\, x f(x) - \cos x f'(x)}{(f(x))^2}$

Hallamos la pendiente $h'(\pi/3) = \frac{-sen\, \pi/3 f(\pi/3) - \cos \pi/3 f'(\pi/3)}{(f(\pi/3))^2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)4 - \left(\frac{1}{2}\right).2}{(4)^2} = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{16}$

$h(\pi/3) = \frac{\cos \pi/3}{f(\pi/3)} = \frac{1/2}{4} = \frac{1}{8}$

Ecuación recta tangente: $y - \frac{1}{8} = (\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{16})\,(x - \frac{\pi}{3})$.

Ejercicio 12

¿Qué significa que *f* sea derivable en *x* = *a*?

Rta

Que posee recta tangente a la gráfica de la función en el punto P*(a, f(a))***.**

Ejercicio 13

¿Cuál es la relación entre la derivabilidad y la continuidad de una función?

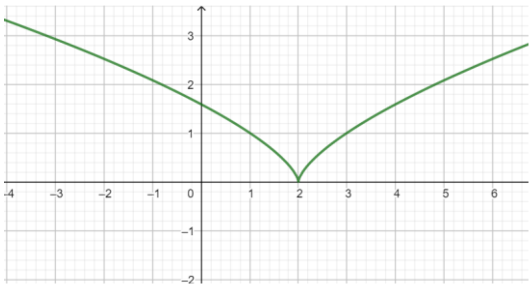
Rta

Toda función derivable es continua pero una función continua no necesariamente es derivable.

Ejercicio 14

Trace la gráfica de una función continua pero no derivable en *x = 2*.

Rta



Ejercicio 14

Encuentre una polinomial de segundo grado $p(x) = ax^2 + bx + c$. Tal que p(2)=5, p´(2)=3 y p´´(2)= 2.

Solución

Con la información dada obtenemos los coeficientes a, b y c.

$p(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow p(2) = 4a + 2b + c = 5 \quad (1)$

$p'(x) = 2ax + b \qquad \Rightarrow p'(2) = 4a + b = 3 \quad (2)$
$p''(x) = 2a \qquad \Rightarrow p''(2) = 2a = 2 \quad (3)$

De la ecuación (3) *a*= *1* reemplazando este valor en la ecuación (2) , tenemos que b = -1 y luego reemplazando ambos valores en la ecuación (1), c= 3.

Luego $p(x) = x^2 - x + 3$.