Facultad de Ingeniería

Cálculo en una Variable

Bioingeniería
Licenciatura en Bioinformática
Ingeniería en Transporte

Tema: Derivada (Parte II)

Prof. Liliana Taborda

Sección 3.4: Regla de la cadena

Sección 3.5: Derivación implícita

Sección 3.6: Derivadas de funciones logarítmicas- Derivación logarítmica

Sección 3.4: Regla de la cadena

Regla de la cadena

¿Cómo obtenemos la derivada de la función $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ ***?***

¿Y la derivada de las siguientes funciones?

$$F(x) = \left(5x^3+1\right)^7$$
$$F(x) = ln(x^3+4x)$$
$$F(x) = e^{x^2+x}$$
$$F(x) = 3x + cos(x^2)$$

Regla de la cadena

Relación entre las derivadas

Ejemplo 1

La función $y = 6x - 9 = 3(2x - 3)$ es la composición de las funciones $f(\mathrm{u}) = 3u$ y $u = \mathrm{g}(x) = 2x - 3$

¿Cómo se relacionan las derivadas de estas tres funciones?

Solución

Utilizaremos la *notación de Leibniz*, y tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 6\ , \frac{dy}{du} = 3, \frac{du}{dx} = 2$$

Como 6 = 3.2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

¿Será una coincidencia que $dy/dx = dy/du \cdot du/dx$?

Regla de la cadena

Podemos pensar la derivada como una razón de cambio, entonces ésta relación es razonable.

Si $\boldsymbol{y = f(u)}$ y $\boldsymbol{u = g(x)}$ y $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{du}} = 3$, $\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}} = 2$

Es decir

- ✓ $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{du}} = 3$ $\qquad$ ***y*** cambia 3 veces con respecto a ***u***
- ✓ $\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}} = 2$ $\qquad$ ***u*** cambia 2 veces con respecto a ***x***

entonces es de esperar que ***y*** cambie 6 veces más rápido que ***x***, $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = 6$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

la tasa de cambio de ***y*** *con respecto a* ***x***

la tasa de cambio de ***y*** *con respecto a* ***u***

la tasa de cambio de ***u*** *con respecto a* ***x***

Regla de la cadena

Relación entre las derivadas

Ejemplo 2

La función $y = (5x^2 + 3)^2$ es la composición de las funciones $f(\text{u}) = u^2$ y $u = \text{g}(x) = 5x^2 + 3$ al calcular las derivadas, vemos que

- ✓ $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u.10x = 2(5x^2 + 3).10x = 100x^2 + 60x.$

- ✓ Si reescribo la función $y = (5x^2 + 3)^2 = 25x^4 + 30x^2 + 1$

entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(25x^4 + 30x^2 + 1) = 100x^2 + 60x.$

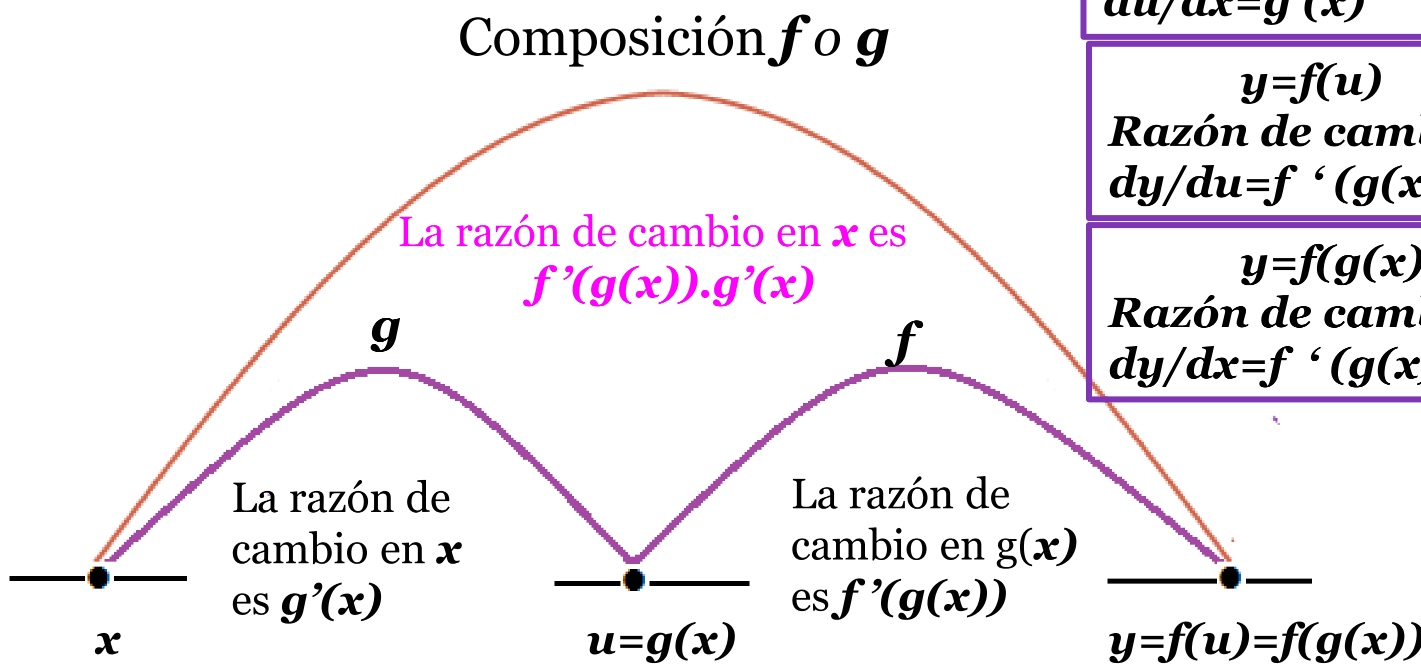
De nuevo tenemos que : $dy/dx = dy/du \cdot du/dx$

Regla de la cadena

u=g(x)
Razón de cambio en x
du/dx=g'(x)

y=f(u)
Razón de cambio en u
dy/du=f '(g(x))

y=f(g(x))
Razón de cambio en x
dy/dx=f '(g(x)).g' (x)



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'\big(g(x)\big)g'\,(x)}$$

¨La **derivada de la composición** ***f (g(x)) en*** *x es la* ***derivada de f en g(x)*** *por* ***la derivada de g en*** *x* ¨.

Regla de la cadena

Definición : Regla de la cadena

Si ***g*** es derivable en ***x*** y ***f*** es derivable en ***g(x),*** entonces la ***función compuesta*** *F=f* o *g* definida mediante *F(x) = f(g(x))* es derivable en ***x***, y

$$\boldsymbol{F'(x) = f'\big(g(x)\big)g'\,(x)}$$

Notación de Leibniz

Si ***y = f(u)*** y ***u = g(x)*** son funciones derivables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

Regla de la cadena

Función exterior

$$y = f(g(x)) = f(u) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Función interior

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

Regla de la cadena

> ***Regla de la cadena:***
> *Si* $y = f\,(g(x))$, *entonces*
> $$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ejemplo 3

Derivar $y = cos(x^2 + 3x)$ respecto de x.

Solución

$$u = g(x) = x^2 + 3x \quad \textbf{\textit{Función interior}}$$
$$y = f(u) = \cos(u) \quad \textbf{\textit{Función exterior}}$$

$$\frac{d}{du}(cos(\underbrace{x^2 + 3x}_{\textit{Función interior}})) = \underbrace{-\,\mathrm{sen}(x^2 + 3x)}_{\textit{Derivada de la función exterior evaluada en la función interior}} . \underbrace{(2x + 3)}_{\textit{Derivada de la función interior}}.$$

Función exterior

Regla de la cadena

Regla de la cadena:
Si $y = f\,(g(x))$, *entonces*
$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ejemplo 4

Derivar $y = (5x^3 + 1)^7$ respecto de x.

Solución

$$u = g(x) = 5x^3 + 1$$
$$y = f(u) = u^7$$

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{(5x^3 + 1)}_{\text{Función interior}}{}^7\Big) = \underbrace{7(5x^3 + 1)^6}_{\text{Derivada de la función exterior evaluada en la función interior}} . \underbrace{15x}_{\text{Derivada de la función interior}} .$$

Función exterior

Regla de la cadena para la potencia de una función
$$\frac{d}{dx}[u^n] = n\,u^{n-1} \cdot u'$$

Regla de la cadena

Regla de la cadena para la potencia de una función

$$\frac{d}{dx}[u^n] = n\,u^{n-1}\cdot u'$$

Ejemplo 5

Derivar $y = F(x) = \sqrt{x^2+1}$ respecto de x.

Solución

Reescribo la función $y = F(x) = (x^2+1)^{1/2}$.

$$\frac{d}{dx}\left((x^2+1)^{1/2}\right) = (1/2)(x^2+1)^{-1/2}.\,2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Regla de la cadena

Regla de la cadena:
Si $y = f\,(g(x))$, *entonces*
$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ejemplo 6

Derivar $y = e^{x^2+x}$ respecto de x.

Solución

$u = g(x) = x^2 + x$ ***Función interior***
$y = f(u) = e^u$ ***Función exterior***

$$\frac{d}{dx}\Big(\overbrace{e^{x^2+x}}^{\text{Función interior}}\Big) = \underbrace{e^{x^2+x}}_{\text{Derivada de la función exterior evaluada en la función interior}} . \overbrace{(2x+1)}^{\text{Derivada de la función interior}}.$$

Función exterior

Regla de la cadena para la exponencial *(u función de x)*
$$\frac{d}{dx}[e^u] = e^u \cdot u'$$

Regla de la cadena

Regla de la cadena:
Si $y = f\,(h(g(x)))$, *entonces*
$y' = f'(h(g(x))) \cdot h'(g(x))g'(x)$

Ejemplo 7

Derivar $y = \ln(sen(x^2 + 1)$ respecto de x.

Solución

$$\boxed{\begin{aligned} u &= g(x) = x^2 + 1 \\ m &= h(u) = sen(u) \\ y &= f(m) = ln(u) \end{aligned}}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(sen(x^2 + 1))) = \underbrace{\frac{1}{sen(x^2 + 1)}}_{\boldsymbol{f'(h(g(x)))}} . \underbrace{\cos(x^2 + 1)}_{\boldsymbol{h'(g(x))}} . \underbrace{(2x)}_{\boldsymbol{g'(x)}}.$$

Sección 3.5: Derivación implícita

Derivación respecto de x

Derivar la expresión respecto de *x*, considero que *y* depende de *x*

$$\frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$$

Las variables coinciden

Las variables coinciden:
se aplica la regla simple de la potencia .

$$\frac{d}{dx}[\overbrace{y^3}^{u^n}] = \overbrace{3y^2}^{nu^{n-1}}\overbrace{\frac{dy}{dx}}^{u'}$$

Las variables no coinciden

Las variables no coinciden: y
*¨**y** depende de **x**¨*
se aplica la regla de la cadena

Derivación respecto de x

Derivar la expresión respecto de *x*, considero que *y* depende de *x*

$$\frac{d}{dx}[xy^2] = x\frac{d}{dx}[y^2] + y^2\frac{d}{dx}[x]$$ ***Regla del producto***

$$= x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(1)$$ ***Regla de la cadena***

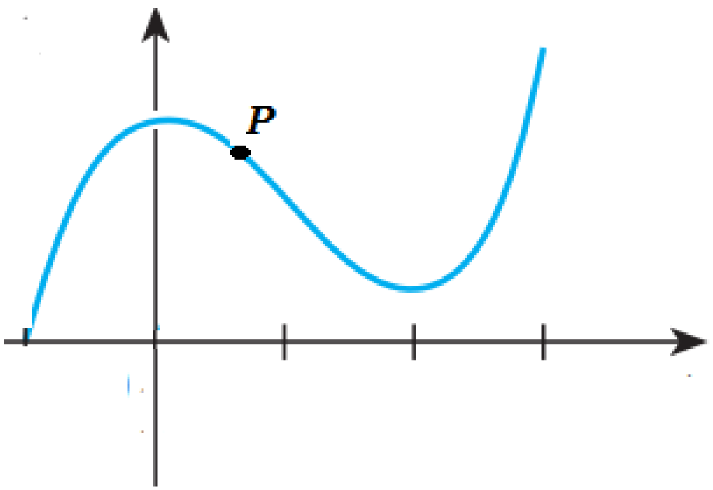
$$= 2xy\frac{dy}{dx} + y^2$$

Derivación implícita

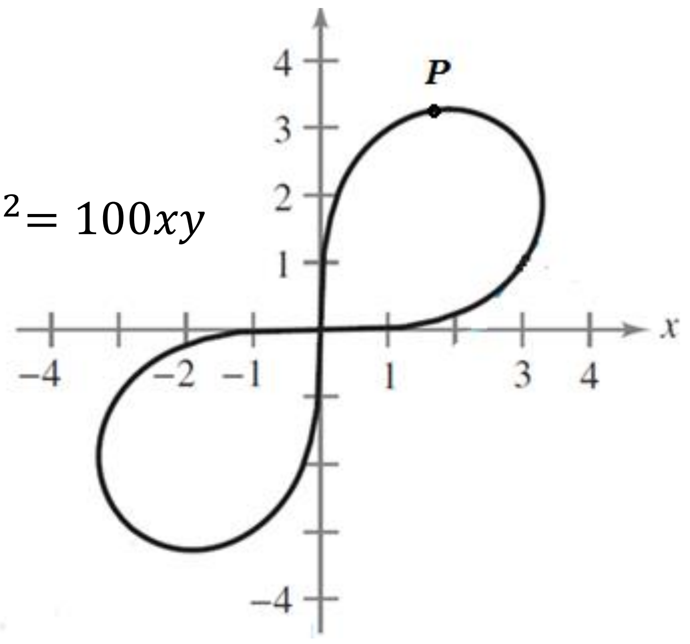
Pendiente de una curva en un punto ***P***

$y = f(x)$

$F(x.y)=0$



$3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$



Derivación implícita

Forma explícita

$y = f(x)$

Ejemplo

$$y = 5x^2 - 4$$

Forma implícita

$F(x.y)=0$

Ejemplo

$$x^2 - y^3 + 2xy = 3$$

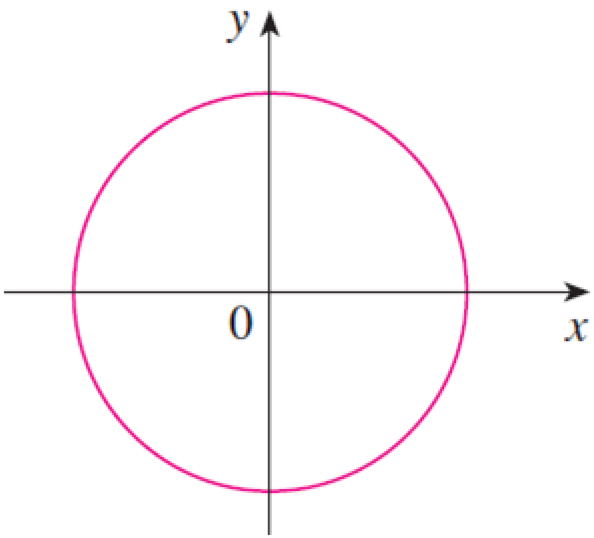
Forma implícita	Forma explícita	Derivada
$xy = 1$	$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -\frac{1}{x^2}$

¿Y si no puedo obtener una forma explícita?

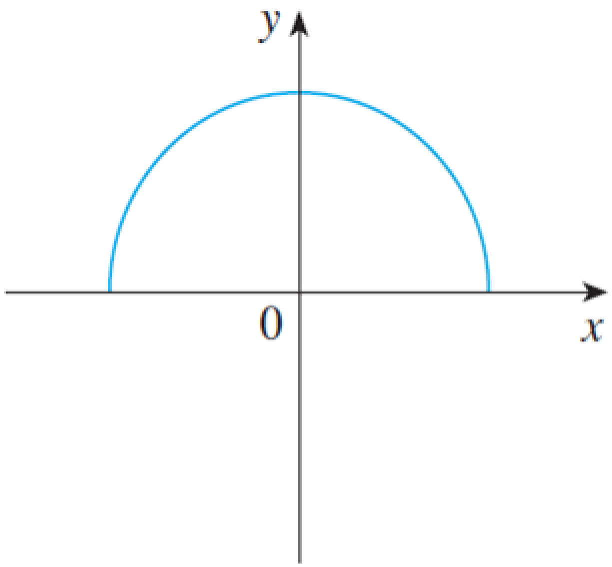
Derivación implícita

Ejemplo

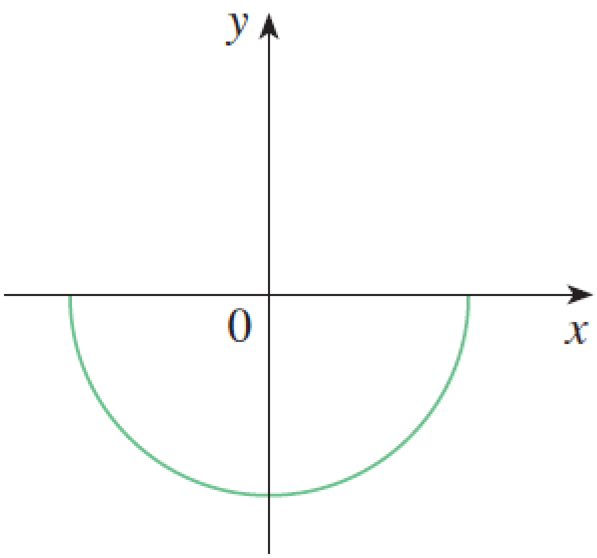
Considero la gráfica



Gráfica de la ecuación
$x^2 + y^2 = 25$



Gráfica de la función
$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$



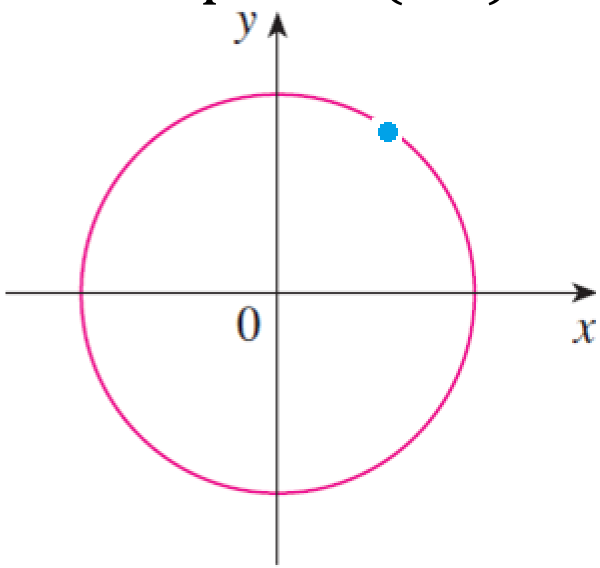
Gráfica de la función
$g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

No es la gráfica de una función

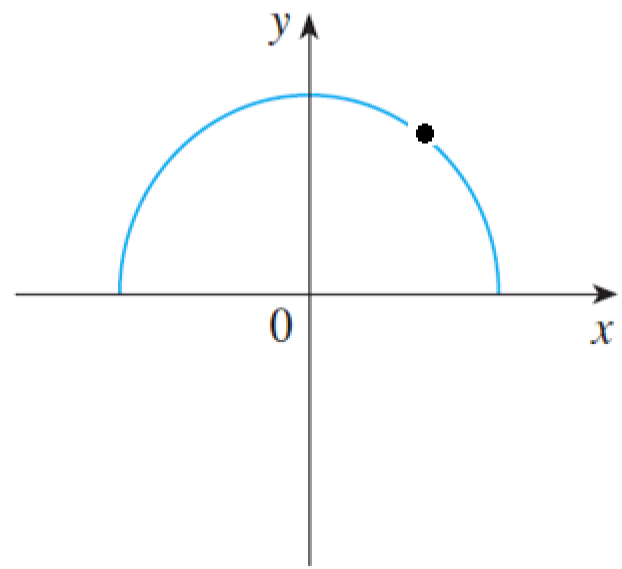
Derivación implícita

Ejemplo

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3,4)



$x^2 + y^2 = 25$



$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

Derivación implícita

Ejemplo

Para la gráfica de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$

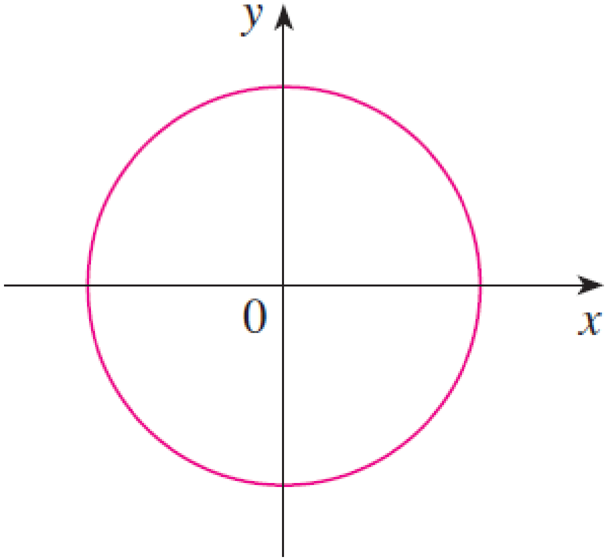
a) En qué puntos de la curva la recta tangente es horizontal?

b) Existe algún punto de curva donde la `pendiente no está definida?

Solución

a) $\frac{dy}{dx} == -\frac{x}{y}$,la derivada es cero para *x=0*, por lo tanto la recta tangente es horizontal en los puntos (0, -5) y (0, 5)

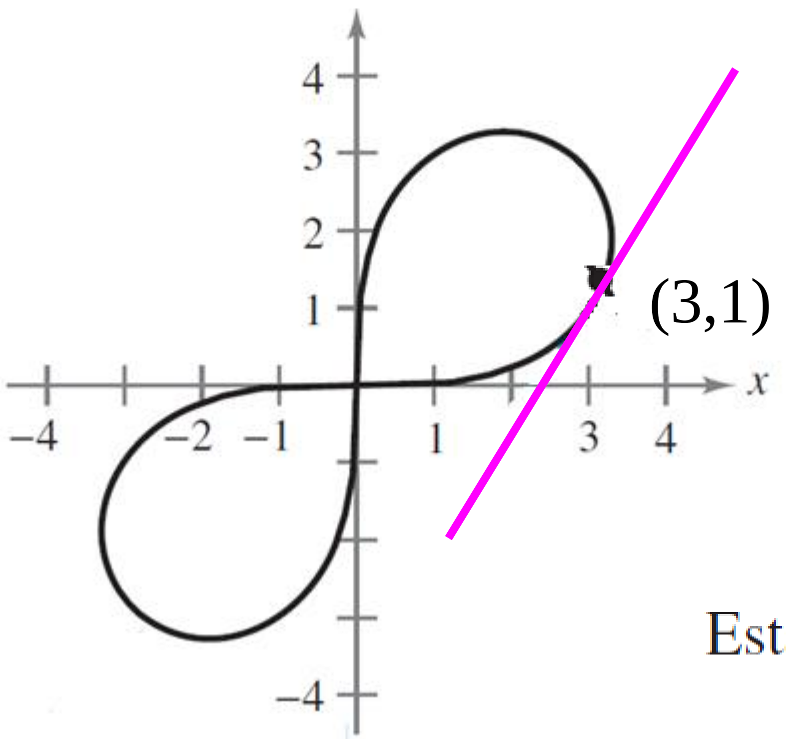
a) La `pendiente no está definida donde la derivada no existe y eso ocurre cuando y=0, es decir en los puntos (-5, 0) y (5, 0)



$x^2 + y^2 = 25$

Derivación implícita

Calcular la pendiente de la gráfica $3(x^2+y^2)^2 = 100xy$ en el punto (3,1)



Esta gráfica se denomina **lemniscata**.

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derivada de las funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(sen^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(csc^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Sección 3.6: Derivada de funciones logarítmicas
Derivación logarítmica

Derivadas de funciones logarítmicas

Derivada de la función logaritmo

$$\frac{d}{dx}(log_a(x)) = \frac{1}{x \ln a}$$

Derivada de la función natural

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Regla de la cadena

Regla de la cadena:
Si $y = f\,(g(x))$**,** *entonces*
$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ejemplo 6

Derivar $y = \ln(x^3 + 2x)$ respecto de x.

Solución

$u = g(x) = x^3 + 2x$ ***Función interior***
$y = f(u) = \ln(u)$ ***Función exterior***

$$\frac{d}{dx}(\ln(\overbrace{x^3 + 2x}^{\textit{Función interior}})) = \underbrace{\frac{1}{x^3 + 2x}}_{\textit{Derivada de la función exterior evaluada en la función interior}} . \overbrace{(3x^2 + 2)}^{\textit{Derivada de la función interior}}.$$

Función exterior

Regla de la cadena para el logaritmo *(u función de x)*
$$\frac{d}{dx}[\ln(u)] = \frac{1}{u} \cdot u'$$

Derivadas de funciones logarítmicas

Derivada de la función logaritmo

$$\frac{d}{dx}(log_a(x)) = \frac{1}{x\ln a}$$

Derivada de la función natural

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

En general

Derivada de la función natural

$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Para tener en cuenta!!

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

Derivación logarítmica

Pasos en la derivación logarítmica

1. Tomar logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilizar las leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derivar implícitamente respecto a x.
3. Resolver la ecuación resultante para y'.

Cuatro casos para exponentes y bases:

1. $\dfrac{d}{dx}(a^b) = 0 \quad (a \text{ y } b \text{ son constantes})$ Base constante, exponente constante
2. $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$ Base variable, exponente constante
3. $\dfrac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$ Base constante, exponente variable
4. Para hallar $(d/dx)[f(x)]^{g(x)}$, podemos aplicar la derivación logarítmica. Base variable, exponente variable

Derivación logarítmica

Derivada de funciones complicadas!!

Hallar la derivada de las funciones

a) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x^4-x}}$

b) $y = (x^2 - 2)^{\cos x}$

b) $y = x^{e^x}$

Bibliografía

- STEWART, James, (2012): *“Cálculode una variable-Trascendentes y tempranas”* - 7ma edición - Cengage – Learning – México.