

Guía de Trabajo Práctico VII

Derivada parte III

Calculo en una Variable - Cursado 2do Cuatrimestre

Ejercicios:

1. Explique la diferencia entre un mínimo absoluto y un mínimo local.
2. Supongamos que f es una función continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.
 - a. ¿Qué teorema garantiza la existencia de un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto de f ?
 - b. ¿Qué pasos daría para encontrar los valores máximo y mínimo?
3. Para cada uno de los números a, b, c, d, r y s de la figura 1, indique si la función cuya gráfica se muestra, tiene un máximo o mínimo absolutos, un máximo o mínimo locales, o ni un máximo ni un mínimo.

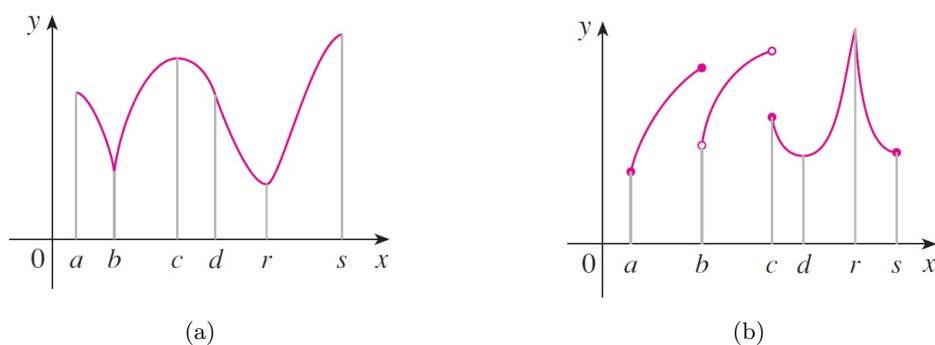


Figura 1

4. Utilice las gráficas de la figura 2 para establecer los valores máximos y mínimos absolutos y locales de cada función.

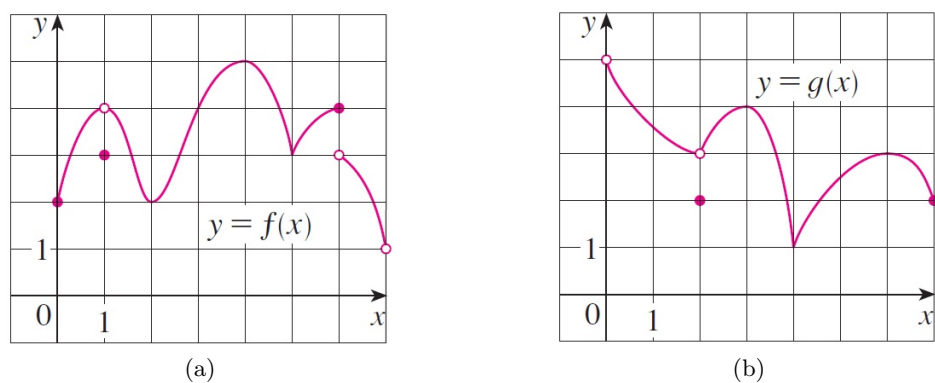


Figura 2

5. Esboce la gráfica de una función f que es continua sobre $[1, 5]$ y tiene las siguientes propiedades.

- Mínimo absoluto en 1, máximo absoluto en 5, máximo local en 2, mínimo local en 4.
- f no tiene mínimo ni máximo locales, pero 2 y 4 son números críticos.

6. Trace a mano la gráfica de f y utilícela para encontrar los valores máximos y mínimos, absolutos y locales de f .

a. $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x, \quad x \geq -2.$

d. $f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leq 2.$

b. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad 1 < x < 3.$

e. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}.$

c. $f(x) = \sin x, \quad -\pi/2 < x \leq 0.$

7. Encuentre los números críticos de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 5 + 54x - 2x^3.$

c. $f(x) = x + \frac{1}{x}.$

e. $f(\theta) = 2 \cos \theta + \sin^2 \theta.$

b. $g(t) = |3t - 4|.$

d. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2.$

f. $f(x) = x^2 e^{-3x}.$

8. Encuentre los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f sobre el intervalo dado. Notar que las funciones dadas, son las del punto a y c del ejercicio anterior.

a. $f(x) = 5 + 54x - 2x^3, \quad [0, 4].$

b. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad [0.2, 4].$

9. Verifique que la función satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo dado. Después encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema de Rolle.

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x, \quad [0, 9]$$

10. Sea $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Demuestre que $f(-1) = f(1)$, pero no hay ningún número $x = c$ en $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué no contradice esto el teorema de Rolle?

11. Utilice la gráfica de f que se muestra en la figura 3 para estimar el valor de $x = c$ que satisface la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[0, 8]$.

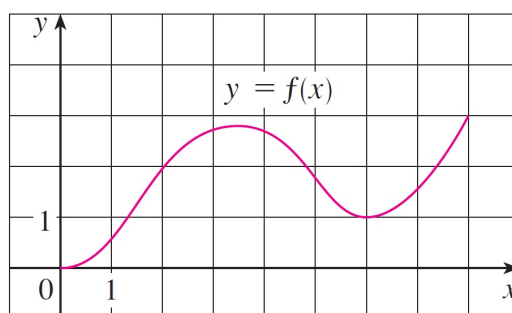


Figura 3

12. Verifique que la función satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado. Después encuentre todos los números $x = c$ que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad [1, 3]$$

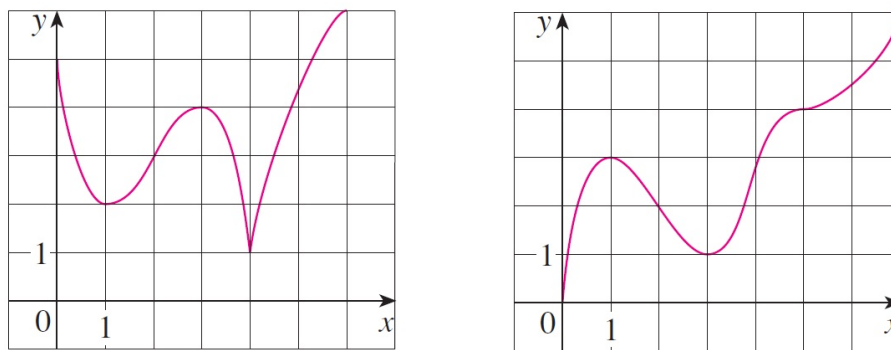


Figura 4

13. Sea $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Demuestre que no hay ningún valor de $x = c$ en $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. ¿Por qué no contradice esto el teorema del valor medio?
14. Utilice la gráfica de f dada en la figura 4 para indicar.
- Los intervalos abiertos donde f' es positiva.
 - Las coordenadas de los puntos donde f' no existe.
 - Los intervalos abiertos donde la pendiente de la curva es negativa.
 - Los intervalos abiertos sobre los que f es cóncava hacia abajo.
 - Las coordenadas de los puntos de inflexión.
15. En la figura 5 se muestran las gráficas de la derivada f' de una función f .
- ¿Sobre qué intervalos f crece o decrece?
 - ¿En qué valores de x , f tiene un máximo o mínimo local?

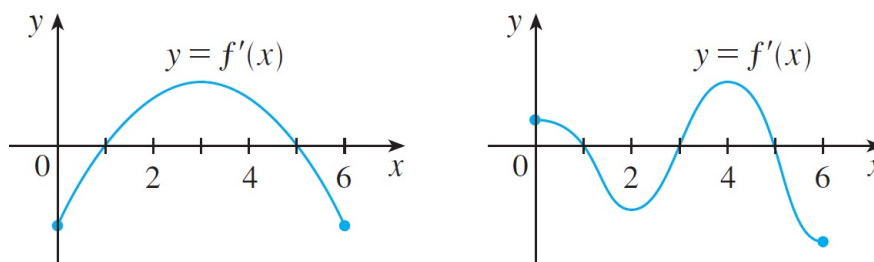


Figura 5

16. En cada inciso establezca las coordenadas x de los puntos de inflexión de f . Dé las razones de sus respuestas.
- Si la curva dada en la figura 6 es la gráfica de f .
 - Si la curva dada en la figura 6 es la gráfica de f' .
 - Si la curva dada en la figura 6 es la gráfica de f'' .

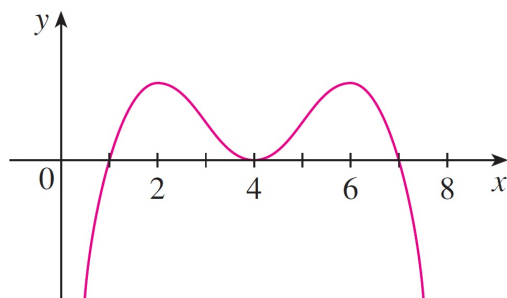


Figura 6

17. Encuentre los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente, los valores máximos y mínimos locales de f y los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

a. $y = \frac{1}{x^2 - 9}$.

b. $y = \frac{x}{x^2 + 9}$.

c. $y = xe^{-x^2}$.

d. $y = \frac{1}{(1 + e^{-x})}$.

e. $y = \frac{e^x}{x^2}$.

f. $y = \frac{\ln x}{x^2}$.

g. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

h. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

i. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$.

j. $f(x) = \sin x + \cos x$,
 $0 \leq x \leq 2\pi$.

18. Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f utilizando las pruebas de la primera y la segunda derivada. ¿Qué método prefiere?

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 1}.$$

19. Esboce la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones determinadas.

a.
$$\begin{cases} f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0 \\ f'(x) > 0 & \text{si } x < 0 \text{ y } 2 < x < 4 \\ f'(x) < 0 & \text{si } 0 < x < 2 \text{ y } x > 4 \\ f''(x) > 0 & \text{si } 1 < x < 3 \\ f''(x) < 0 & \text{si } x < 1 \text{ y } x > 3 \end{cases}.$$

b.
$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } |x| < 2 \\ f'(x) < 0 & \text{si } |x| > 2 \\ f'(-2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2} |f'(x)| = \infty \\ f''(x) > 0 & \text{si } x \neq 2 \end{cases}.$$