Facultad de Ingeniería

Cálculo en una Variable

Bioingeniería
Licenciatura en Bioinformática
Ingeniería en Transporte

Tema: Aplicaciones de la Derivada (Parte I)

Sección 4.1: Valores máximos y mínimos

Sección 4.2: Teorema del valor medio

Sección 4.3: Cómo afecta la derivada la forma de una gráfica

Derivada

Definición

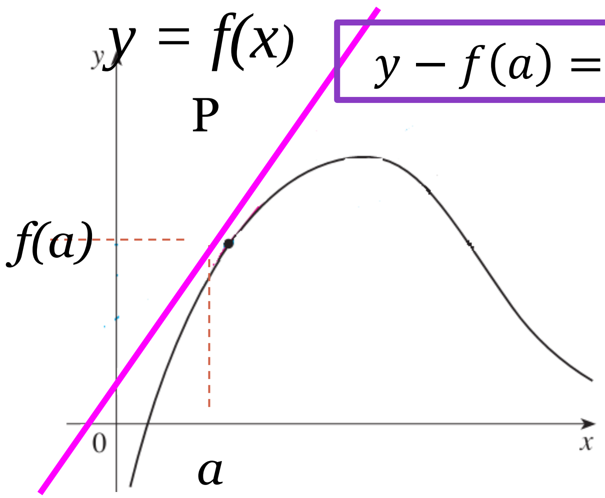
La ***derivada*** *de una función f en un número x = a*, denotada por *f ′(a)*, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

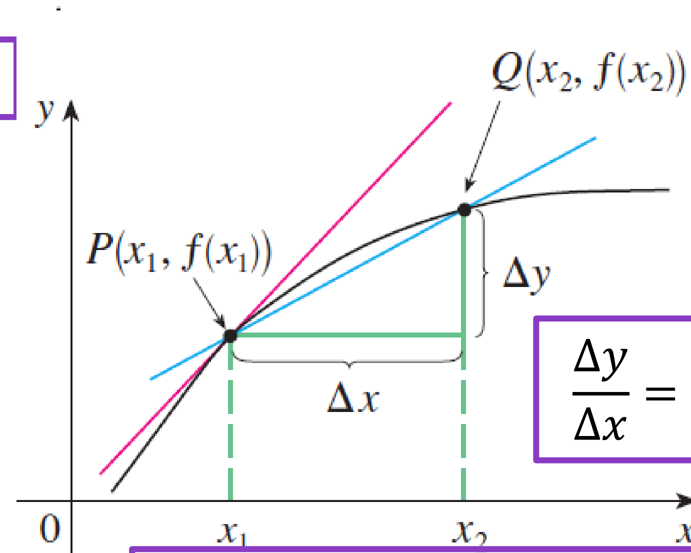
Ecuación de la recta tangente

Razón de cambio instantánea



$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Tabla de fórmulas de derivación

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

Regla de la cadena

Función exterior

$$y = f(g(x)) = f(u)$$

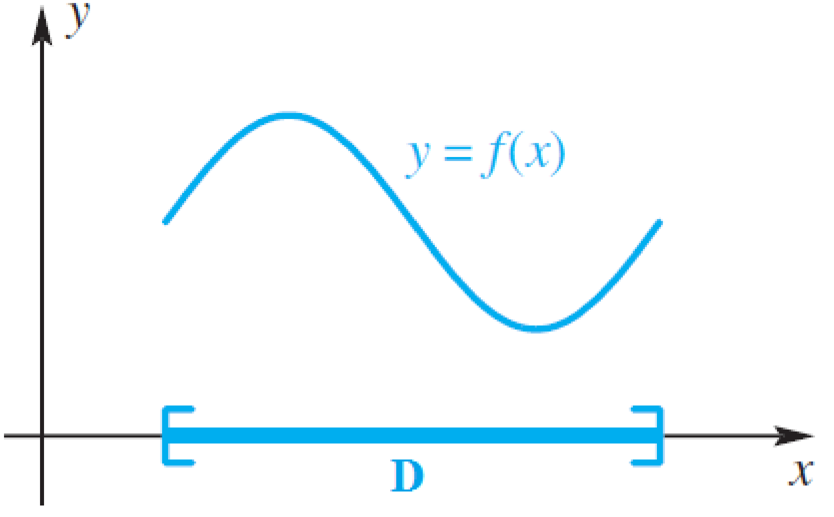
Función interior

$$\boxed{y' = f'(u) \cdot u'}$$

Sección 4.1: Valores máximos y mínimos

Valores extremos (Valor máximo – Valor mínimo)

Sea *f* una función definida en un intervalo D



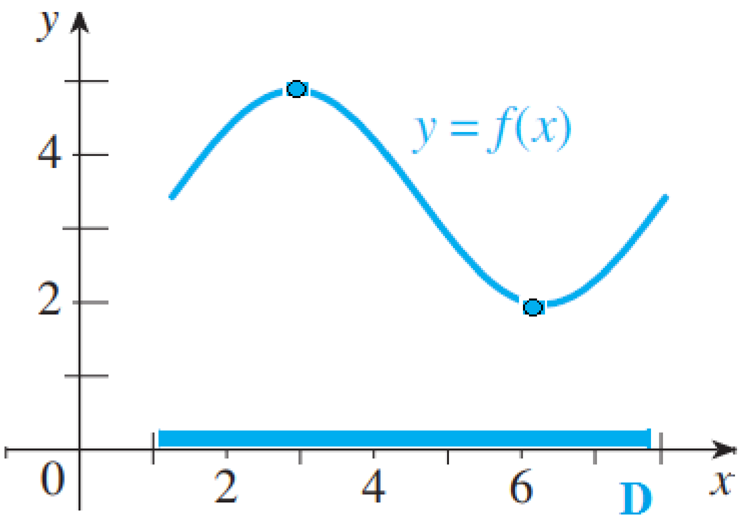
¿f(x) tiene un valor máximo o un valor mínimo en D?

Si tiene un valor máximo o un valor mínimo,
¿ dónde se alcanza?

Si existen,
¿ Cuáles son los valores máximo y mínimo?

¿Cómo los obtengo?

Valores extremos (Valor máximo – Valor mínimo)



El valor más grande de *f* en D es 5 y el valor más pequeño de *f* en D es 2.

5 es el *valor máximo* de *f* y ocurre en *x*= 3 , pues *f(3)=5*

2 es el *valor mínimo* de *f* y ocurre en *x*= 6 , pues *f(6)=2*

Valores extremos

Definición

Sea *c* un número en el dominio D de una función *f*.

Entonces *f(c)* es el

- valor **máximo absoluto (global)** de *f* sobre D

  si $f(c) \geq f(x)$ para toda *x* en D.

- valor **mínimo absoluto (global)** de *f* sobre D

  si $f(c) \leq f(x)$ para toda *x* en D.

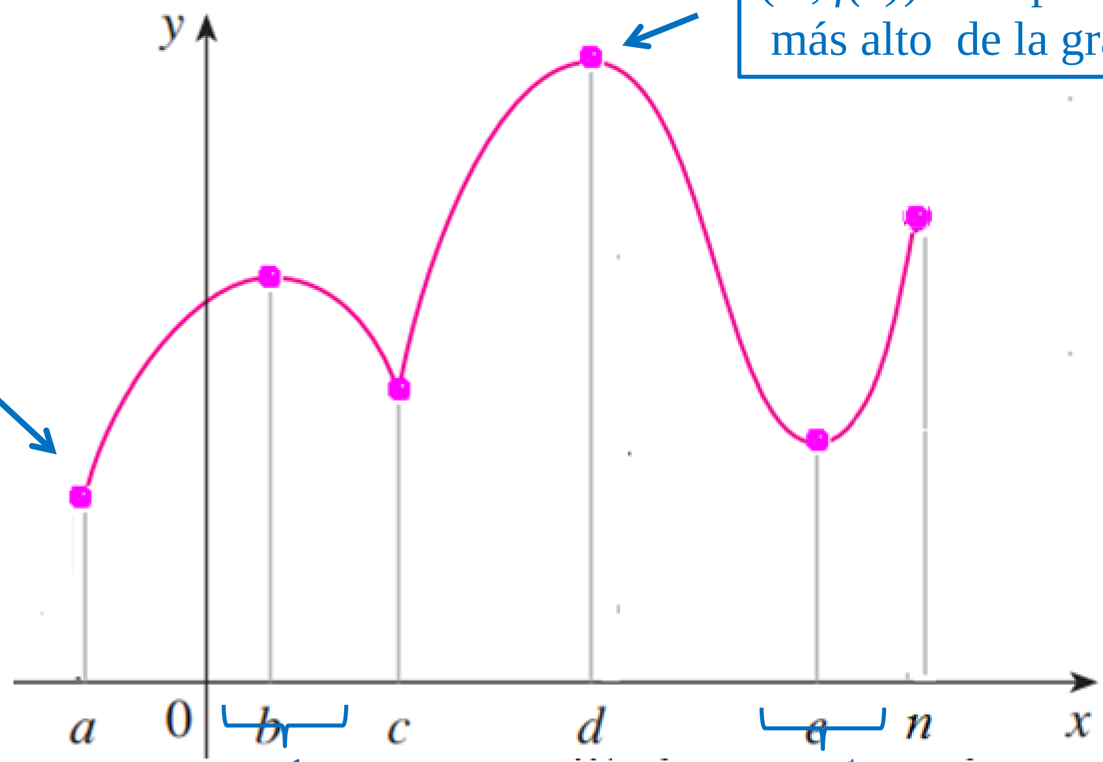
Los valores máximos y mínimo de *f* se llaman ***valores extremos*** de *f*.

Valores extremos (Valor máximo – Valor mínimo)

f(a) mínimo absoluto
f(d)máximo absoluto

(*d*, *f*(*d*)) es el punto
más alto de la gráfica

(*a*, *f*(*a*)) es el punto
más bajo de la gráfica



Para valores x cercanos a *b* , *f(b)* es
más grande que los valores *f(x)*

Para valores x cercanos a *e*, *f(e)* es
más chico que los valores *f(x)*

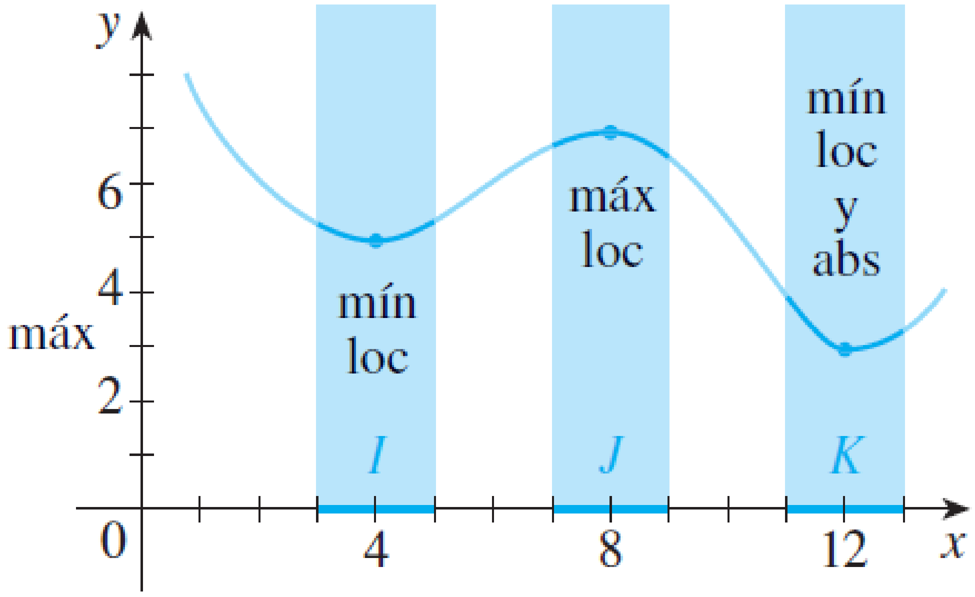
Valores extremos locales

Definición .

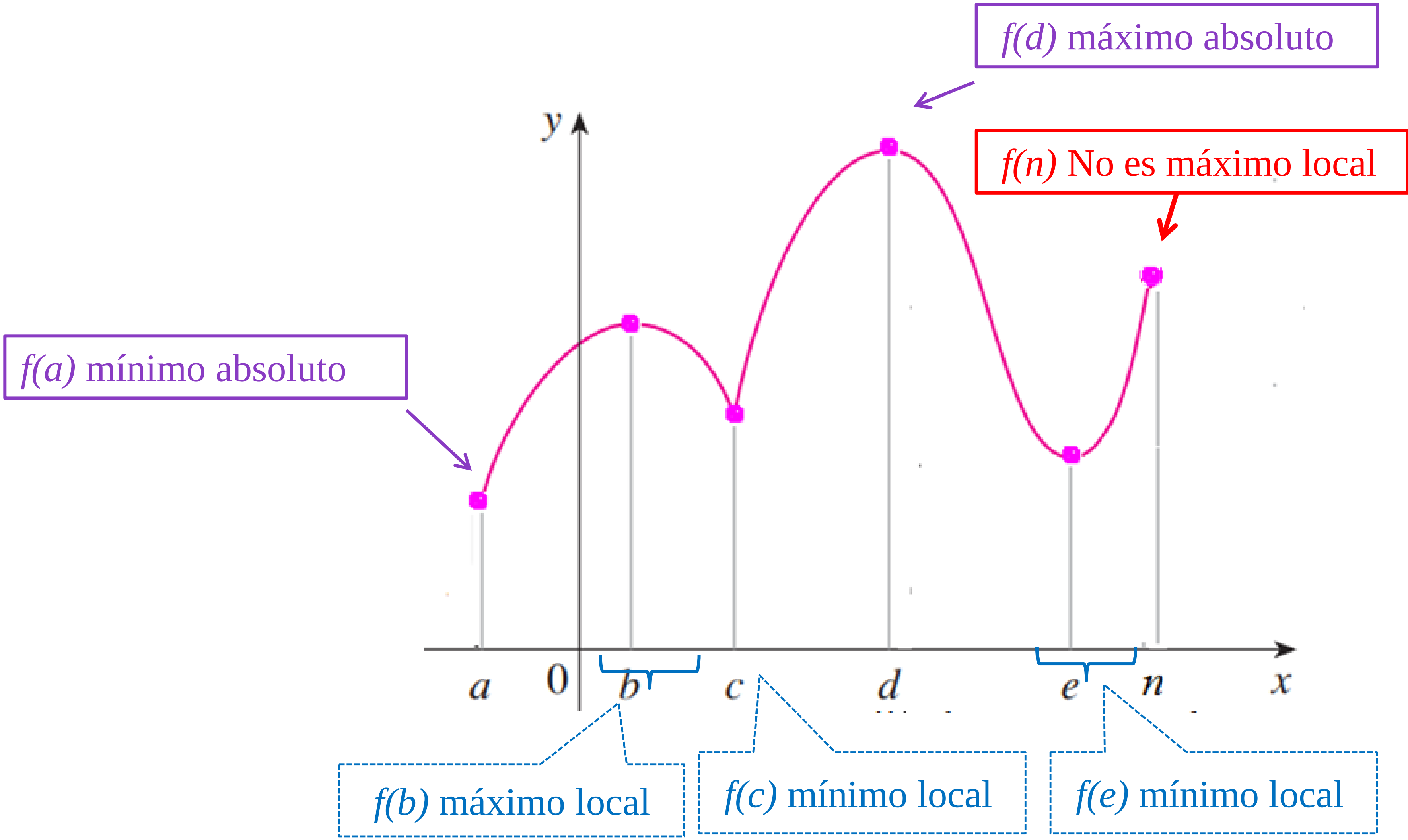
El número $f(c)$ es un

- valor ***máximo local*** de f si $f(c) \geq f(x)$ cuando x está cerca de $\boldsymbol{c}$.

- valor ***mínimo local*** de f si $f(c) \leq f(x)$ cuando x está cerca de $\boldsymbol{c}$.



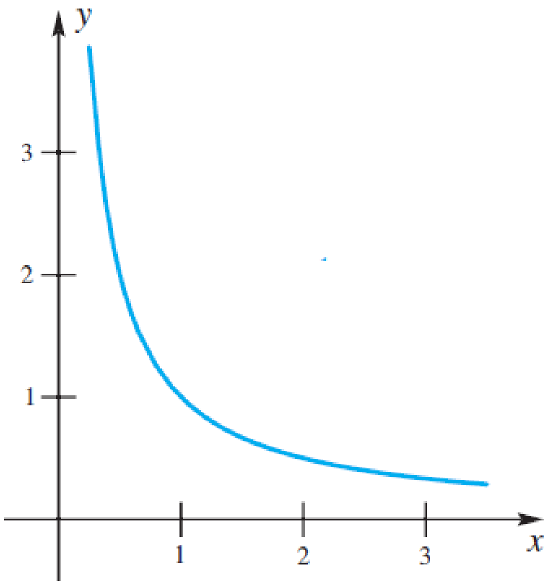
Valores extremos (Valor máximo – Valor mínimo)

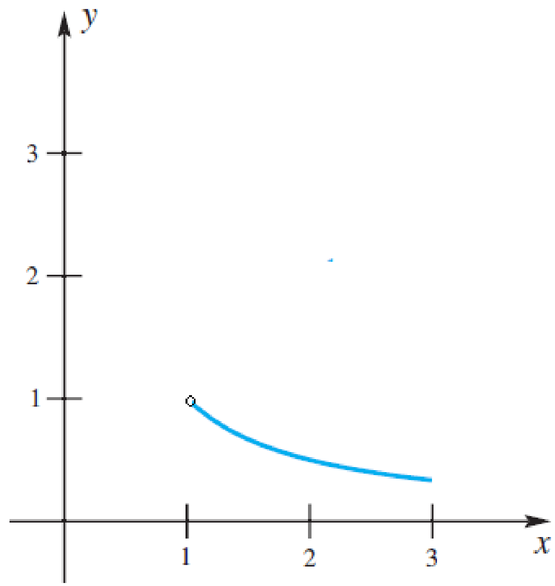


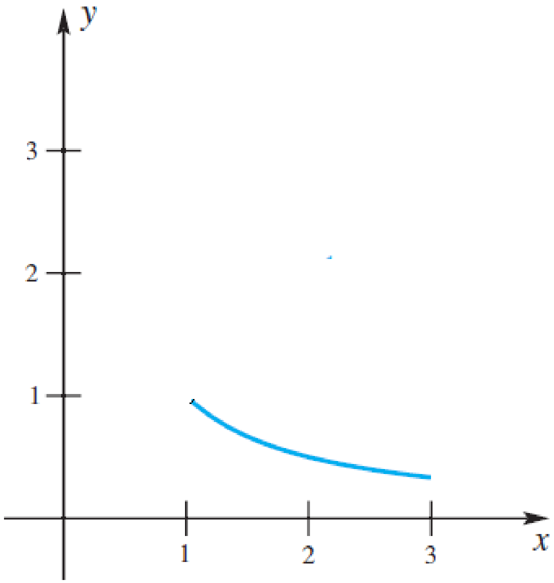
Valores extremos

¿ f tiene un valor mínimo o máximo en el intervalo D ?

Sea la función $f(x) = 1/x$







En D: $(0, \infty)$
No tiene valor máximo.
No tiene valor mínimo.

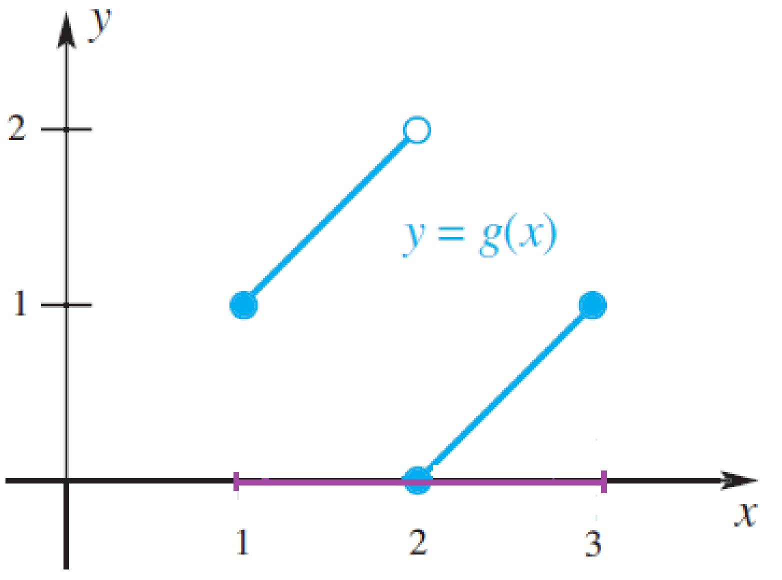
En D: $(1, 3]$
No tiene valor máximo.
Tiene valor mínimo, 1/3

En D: $[1, 3]$
Tiene valor máximo, 1.
Tiene valor mínimo, 1/3.

Valores extremos

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ 1 \le x < 2 \\ x-2 & si\ 2 \le x \le 3 \end{cases}$$



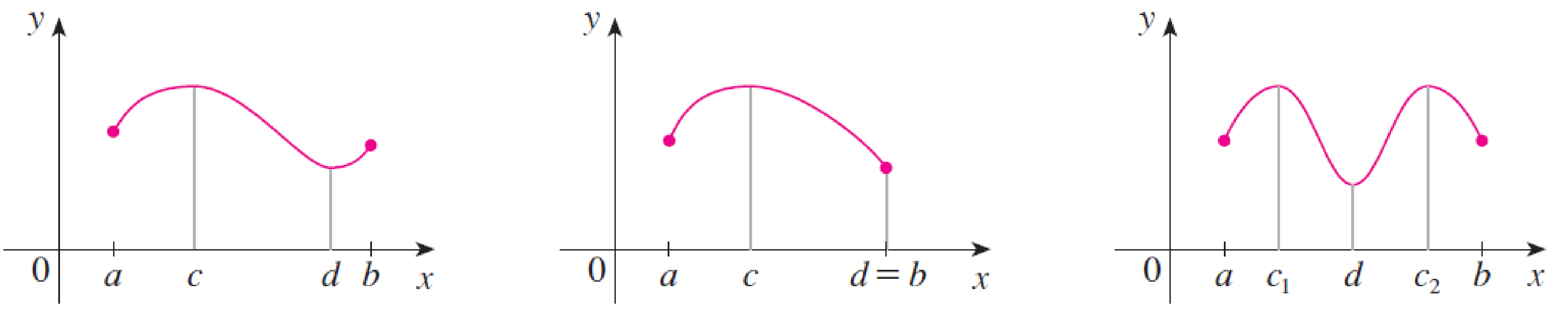
En D: [1, 3]

f no tiene valor máximo.

f tiene valor mínimo, 0.

Teorema del valor extremo

Teorema del valor extremo
Si *f* es continua sobre un intervalo cerrado [*a*, *b*], entonces *f* alcanza un valor ***máximo absoluto*** *f(c)* y un valor ***mínimo absoluto*** *f(d)* en algunos números *c* y *d* en [*a*,*b*].

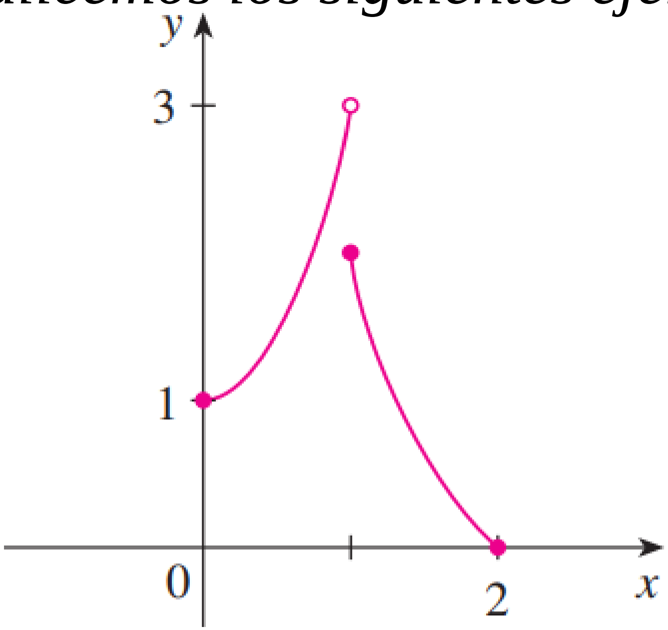


Teorema del valor extremo

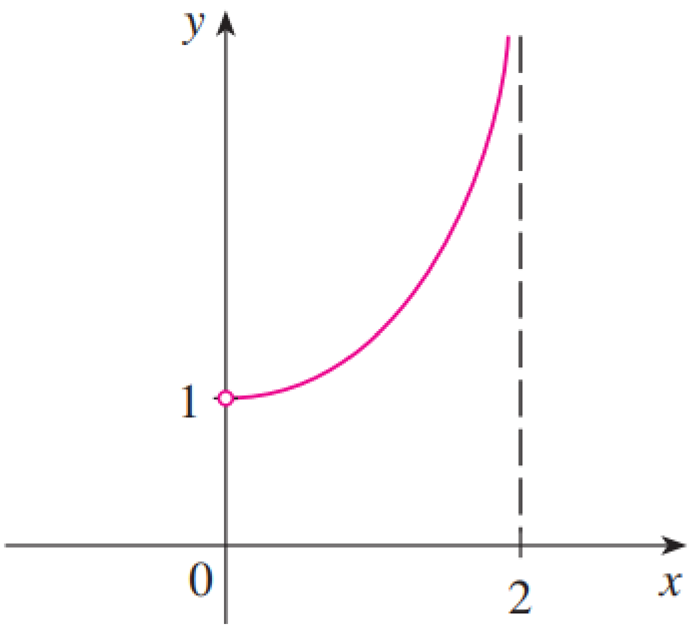
Hipótesis f es ***continua*** sobre un ***intervalo cerrado*** $[a, b]$,

Tesis f alcanza un valor ***máximo absoluto*** y
un valor ***mínimo absoluto*** en algunos números en $[a, b]$.

Analicemos los siguientes ejemplos



Esta función tiene un valor mínimo $f(2) = 0$, pero no tiene valor máximo.

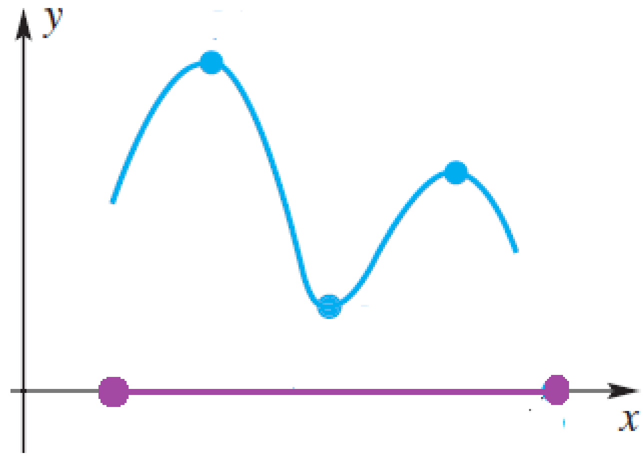


Esta función continua g no tiene máximo ni mínimo.

*Los ejemplos **no contradicen** el Teorema porque **No** verifican las hipótesis*

Valores extremos

¿ Dónde se presentan los valores extremos en un cerrado?

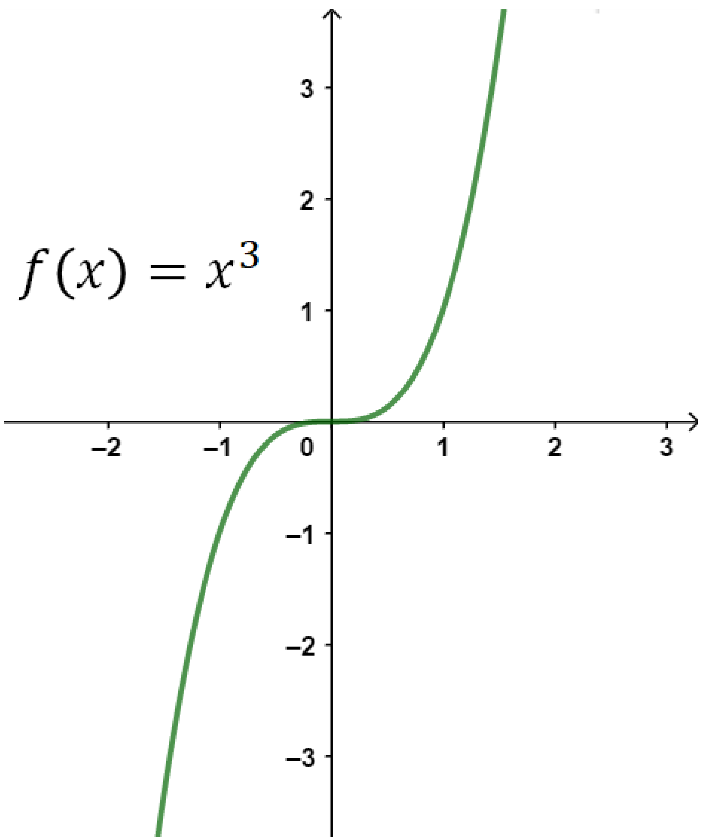


Teorema de Fermat:
Si f tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$ y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$

Valores extremos

¿ Si f ' (c) = 0, entonces hay máximo o un mínimo en x= c ?

Sea $f(x) = x^3$



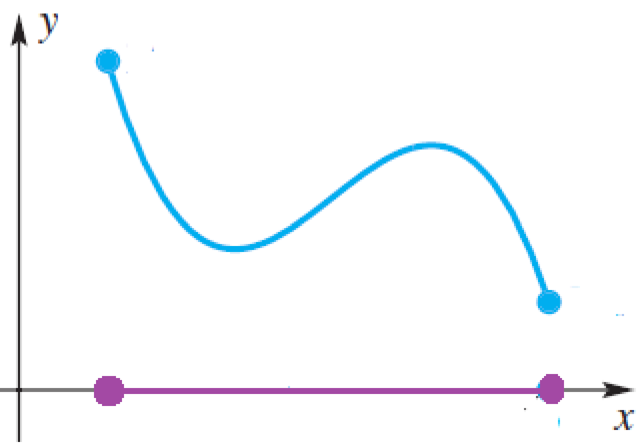
Observemos que:

$f'(x) = 3x^2 \;\; y \quad f'(0) = 3(0)^2 = 0$

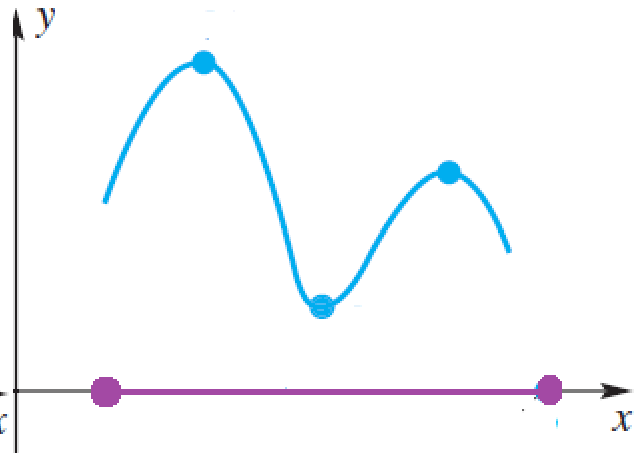
pero en *x = 0* ***no hay ni máximo ni un mínimo.***

Valores extremos

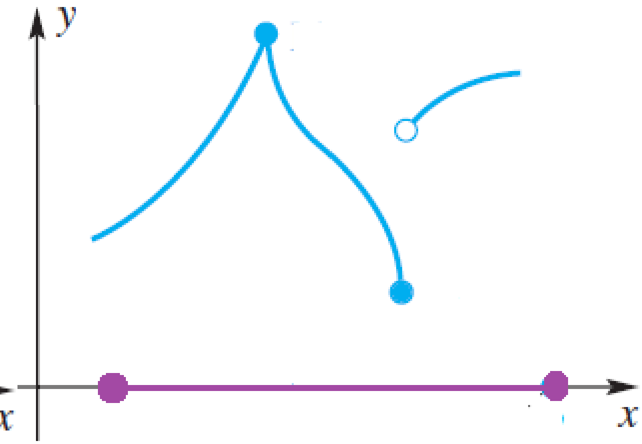
¿ Dónde se presentan los valores extremos en un cerrado?



Puntos extremos del intervalo



Puntos estacionarios



Puntos singulares

Definición:
Un ***número crítico*** de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Valores extremos

Cálculo de extremos en un intervalo cerrado.

Para hallar los valores máximo y mínimo ***absolutos*** de una función continua *f* sobre un intervalo cerrado [*a*, *b*] :

1. Encuentre los número críticos de *f* en (*a*,*b*).
2. Halle los valores de *f* en los número críticos.
3. Halle los valores de *f* en los puntos extremos del intervalo.
4. El valor más grande es el ***máximo absoluto*** y el valor más chico el ***mínimo absoluto***.

Teorema del valor extremo

Hipótesis f es ***continua*** sobre un ***intervalo cerrado*** $[a, b]$,

Tesis f alcanza un valor ***máximo absoluto*** y un valor ***mínimo absoluto*** en algunos números en $[a, b]$.

Ejemplo:

Encuentre los valores máximo y mínimo de $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ en [-1/2, 2]

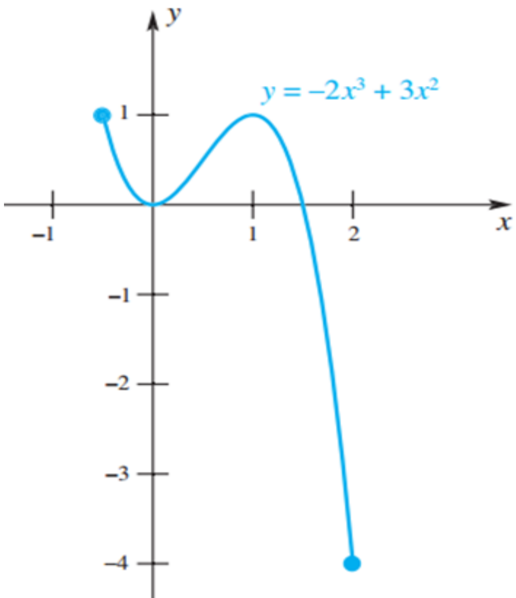
Solución:

Vemos si se verifican las Hipótesis del Teorema del valor extremo. La función $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ es una función continua en el intervalo cerrado [-1/2, 2] porque es una función polinomica, por lo tanto alcanza valor máximo y mínimo absolutos

$f'(x) = -6x^2 + 6x = -6x(x-1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ los números críticos son:0 y 1.

Evalúo f en los valores críticos y en los extremos del intervalo



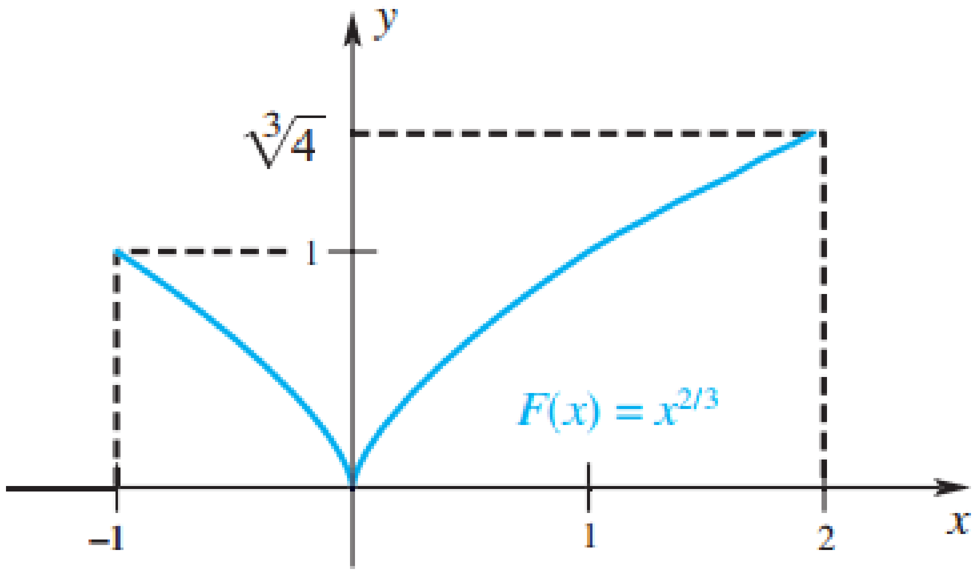
Cálculo de extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado. $[a, b]$:

1. Encuentre los número críticos de f en (a, b).
2. Halle los valores de f en los número críticos.
3. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
4. El valor más grande es el ***máximo absoluto*** y el valor más chico el ***mínimo absoluto***.

Valores extremos

Ejemplo:

Encuentre los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^{2/3}$ en [-1, 2].



Bibliografía

- STEWART, James, (2012): *“Cálculode una variable-Trascendentes y tempranas”* - 7ma edición - Cengage – Learning – México.