

Coloquio II

Aplicaciones de la Derivada (parte I)

Dr. Juan Felipe Restrepo
juan.restrepo@uner.edu.ar

Departamento Académico de Matemática
Cálculo en una Variable

Temas de clase:

1. Qué información aporta f' sobre f ?

Sección 4.3 Pág. 290.

2. Qué información aporta f'' sobre f ?

Sección 4.3 Pág. 292.

Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Definición: (Pág. 274 [Stewart \(2012\)](#))

Máximos y mínimos absolutos:

Sea c un número en el dominio D de una función f .

- $f(c)$ es el **máximo absoluto** de f sobre D si:

$$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in D.$$

- $f(c)$ es el **mínimo absoluto** de f sobre D si:

$$f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$$

Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Definición: (Pág. 274 [Stewart \(2012\)](#))

Máximos y mínimos locales:

Considere una función $f(x)$.

- El valor $f(c)$ es **máximo local** de f si:

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{cuando } x \text{ está cerca de } c.$$

- El valor $f(c)$ es **mínimo local** de f si:

$$f(c) \leq f(x) \quad \text{cuando } x \text{ está cerca de } c.$$

Introducción

Definición de número
crítico

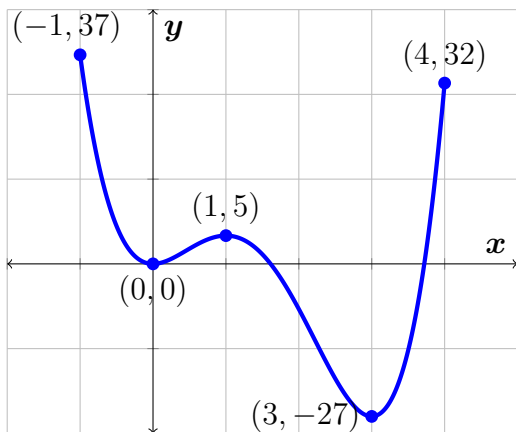
Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Ejemplo:

Determinar los máximos y mínimos locales y absolutos en el intervalo $[-1, 4]$ de la función presentada en la gráfica.



Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Definición: (Pág. 277 Stewart (2012))

Número crítico:

Un número crítico de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que:

1. $f'(c) = 0$ o,

Núm. crítico estacionario

2. $f'(c)$ no existe.

Núm. crítico singular

Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Definición: (Pág. 277 Stewart (2012))

Número crítico:

Un número crítico de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que:

1. $f'(c) = 0$ o,

Núm. crítico estacionario

2. $f'(c)$ no existe.

Núm. crítico singular

Teorema: (Pág. 278 Stewart (2012))

Si f tiene un máximo o un mínimo **local** en $x = c$, entonces c es un número crítico.

Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

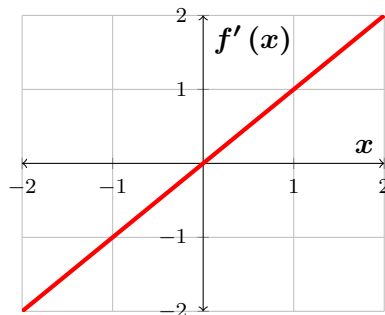
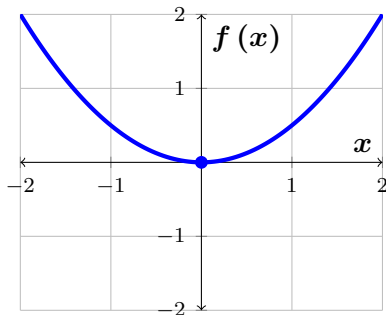
Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$f'(x) = x$$



Mín. local $f(0) = 0$, ubicado en $x = 0$. $f'(0) = 0$ y $x = 0$ es número crítico.

Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

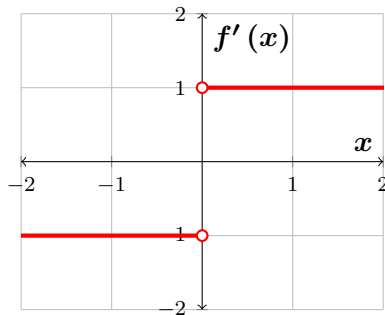
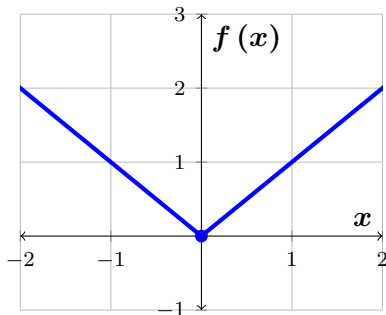
Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Ejemplo:

$$f(x) = |x|$$

$$f'(x) = \frac{|x|}{x}$$



Mín. local $f(0) = 0$, ubicado en $x = 0$. $f'(0)$ no existe y $x = 0$ es número crítico.

Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Importante:

Si c es un número crítico, f **puede no tener** un máximo o un mínimo **local** en $x = c$.

[Introducción](#)

[Definición de número crítico](#)

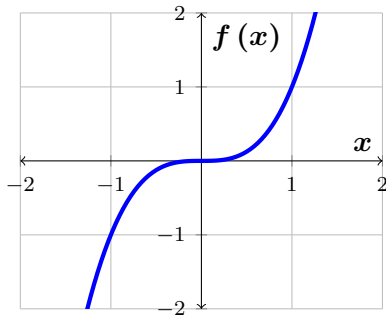
[Qué indica \$f'\$ respecto a \$f\$](#)

[Qué indica \$f''\$ respecto a \$f\$](#)

[Referencias](#)

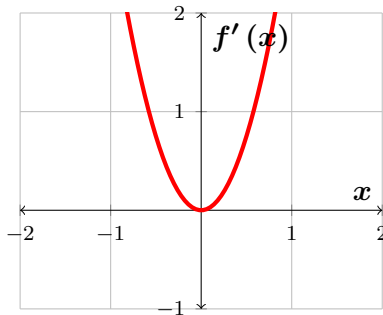
Ejemplo:

$$f(x) = x^3$$



No hay un mín. local en $x = 0$.

$$f'(x) = 3x^2$$



$f'(0) = 0$ y $x = 0$ es número crítico.

Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

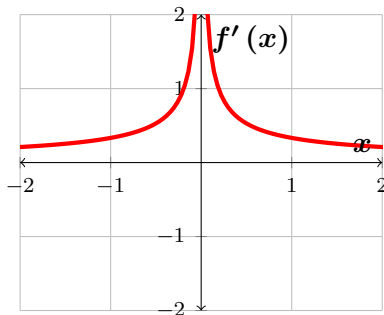
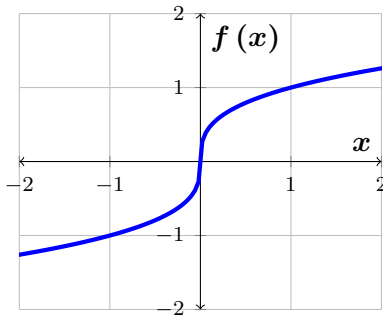
Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Ejemplos:

$$f(x) = x^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$



No hay un mín. local en $x = 0$.

$f'(0)$ no existe y $x = 0$ es número crítico.

Introducción

Definición de número crítico

Qué indica f' respecto a f

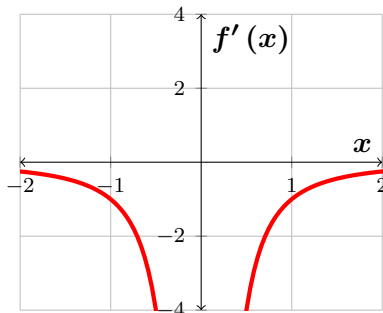
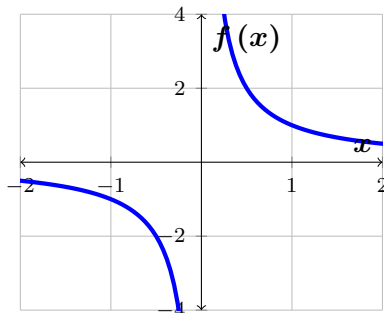
Qué indica f'' respecto a f

Referencias

Ejemplos:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$



No hay un mín. local en $x = 0$, $f(0)$ no está definida.

$f'(0)$ no existe y $x = 0$ no es número crítico.

Introducción

Definición de número crítico

Qué indica f' respecto a f

Qué indica f'' respecto a f

Referencias

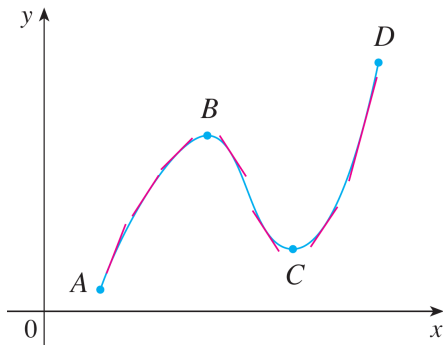
Qué indica f' respecto a f

1. La primera derivada nos dice en que intervalos del dominio f es creciente o decreciente.
2. La primera derivada nos ayuda a identificar los valores extremos de f .

Qué indica f' respecto a f

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

- Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f **es creciente** sobre ese intervalo.
- Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f **es decreciente** sobre ese intervalo.



Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Qué indica f' respecto a f

Valores extremos: prueba de la primera derivada

Suponga que $x = c$ es un número crítico de una función continua f .

1. Si f' **cambia de positiva a negativa** en c , entonces $f(c)$ es un **máximo local**.
2. Si f' **cambia de negativa a positiva** en c , entonces $f(c)$ es un **mínimo local**.

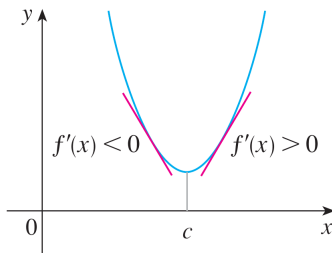
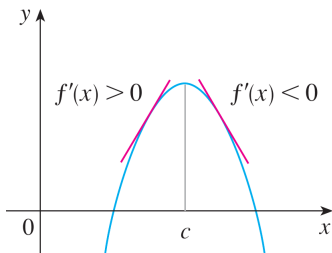
Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

Referencias

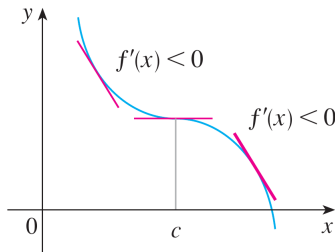
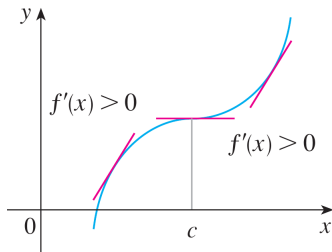


Qué indica f' respecto a f

Valores extremos: prueba de la primera derivada

Suponga que $x = c$ es un número crítico de una función continua f .

1. Si f' **cambia de positiva a negativa** en c , entonces $f(c)$ es un **máximo local**.
2. Si f' **cambia de negativa a positiva** en c , entonces $f(c)$ es un **mínimo local**.
3. Si f' **NO cambia de signo** en c , entonces f **NO tiene ningún valor extremo** en c .



Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Ejercicio:

Sea la función

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

1. Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
2. Encuentre los valores extremos de f .

Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

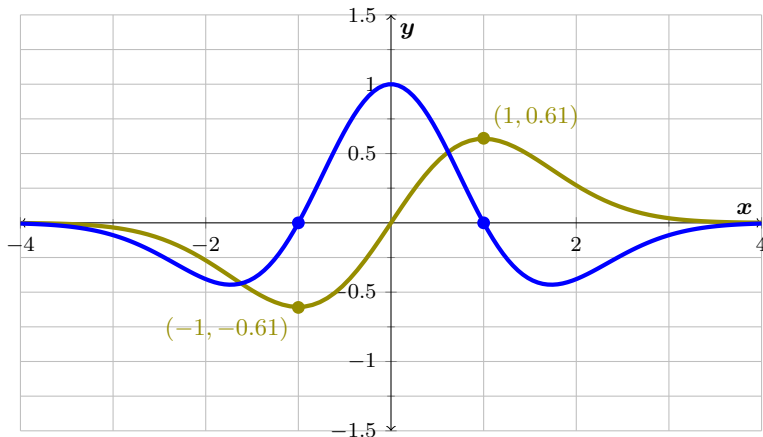
Referencias

Qué indica f' respecto a f

Ejercicio:

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

$$f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$$



Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Qué indica f'' respecto a f

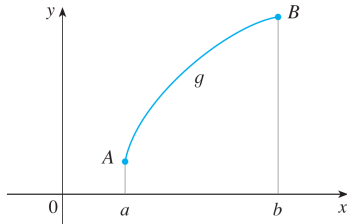
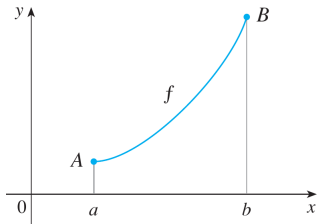
1. La segunda derivada nos dice en que intervalos del dominio f es cóncava hacia arriba o hacia abajo.
2. La segunda derivada nos ayuda a identificar los puntos de inflexión de f .

Qué indica f'' respecto a f

Concavidad:

Una función f puede crecer/decrecer de dos formas:

- Si la gráfica de f queda por arriba de todas sus rectas tangentes sobre un intervalo I , entonces se dice que f es **cóncava hacia arriba sobre I** .
- Si la gráfica de f queda por abajo de todas sus rectas tangentes en I , entonces se dice que f es **cóncava hacia abajo sobre I** .



Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Qué indica f'' respecto a f

Prueba de Concavidad:

- Si $f''(x) > 0$ para toda $x \in I$, entonces la gráfica de f es **cóncava hacia arriba sobre I** .

Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Qué indica f'' respecto a f

Prueba de Concavidad:

- Si $f''(x) > 0$ para toda $x \in I$, entonces la gráfica de f es **cóncava hacia arriba sobre I** .
- Si $f''(x) < 0$ para toda $x \in I$, entonces la gráfica de f es **cóncava hacia abajo sobre I** .

Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Qué indica f'' respecto a f

Número crítico de segunda especie:

Un número crítico de segunda especie de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que:

1. $f''(c) = 0$ o,

Núm. crítico estacionario

2. $f''(c)$ no existe.

Núm. crítico singular

Definición: (Pág. 294 Stewart (2012))

Punto de inflexión:

Un punto P sobre una curva $y = f(x)$ se llama punto de inflexión si **f es allí continua y la curva cambia de concavidad.**

Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

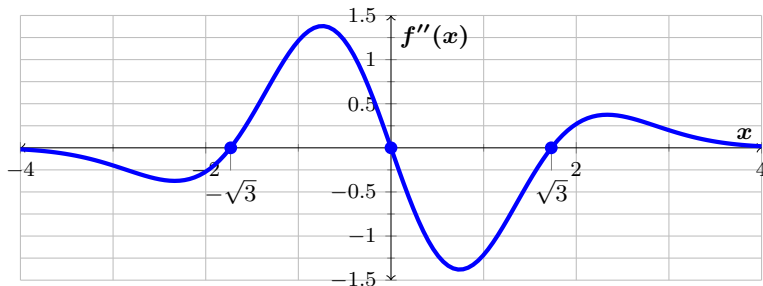
Referencias

Ejercicio:

Sea la función:

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

y su segunda derivada:



1. Encuentre los intervalos de concavidad de f .
2. Encuentre los puntos de inflexión de f .

Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

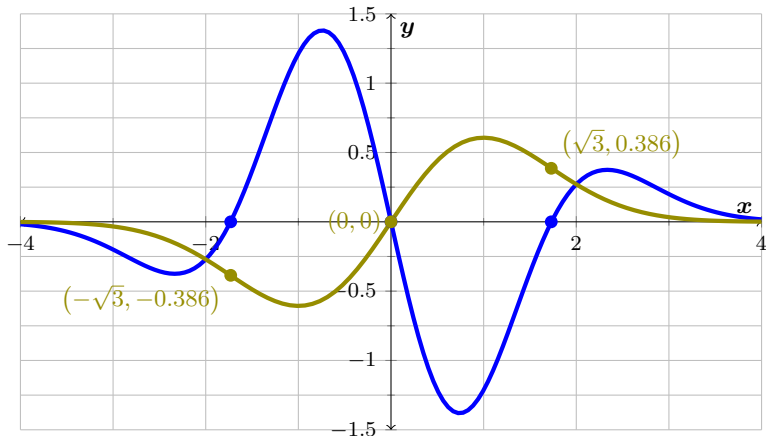
Referencias

Qué indica f'' respecto a f

Ejercicio:

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

$$f''(x) = x(x^2 - 3)e^{-x^2/2}$$



Introducción

Definición de número
crítico

Qué indica f'
respecto a f

Qué indica f''
respecto a f

Referencias

Stewart, J., 2012. Cálculo de varias variables trascendentes tempranas, 7ma edición. Cengage Learning Editores.