Guía Práctica Nro 7: Aplicaciones de la Derivadas I

Respuestas

Ejercicio 1

a. 4,75 A
b. 5 A

Ejercicio 2

a. $P(t) = 100.(4{,}2)^t$
b. $P(3) = 7408{,}8$
c. $P'(3) = 10632{,}25$
d. $t = 3{,}2$

Ejercicio 3

a. La masa que permanece después del tiempo t es $m(t) = 100e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{30}t} = 100e^{\frac{-\ln(2)}{30}t}$
b. La masa luego de 100 años es $m(100) \cong 9.92$
c. El tiempo que debe transcurrir para quedar 1 mg es $t \cong 199{,}324{,}75$ A

Ejercicio 4

La diferencia entre un mínimo absoluto y un mínimo local es que el mínimo local es el valor más chico que toma la función en la cercanía del punto (es decir en un intervalo abierto que contiene al valor mínimo), en cambio el valor mínimo absoluto es el valor más pequeño en todo el dominio de la función f.

Ejercicio 5

a. El teorema del valor extremo (ver página 275 de la Sección 4.1 del libro Stewart)
b. Para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua sobre un intervalo cerrado [a,b] se siguen los siguientes pasos:
   1. Encontrar los valores de f en los números críticos de f en [a,b].
   2. Hallar los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
   3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el valor más pequeño, el valor mínimo absoluto.

Ejercicio 6

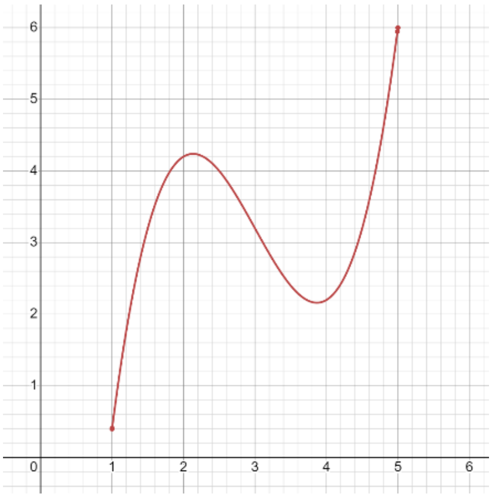
a. min local en b y r; min absoluto en r; max absoluto en s; max Local en c.
b. min absoluto en a; min local en d; max Local en b, max absoluto en r.

Ejercicio 7

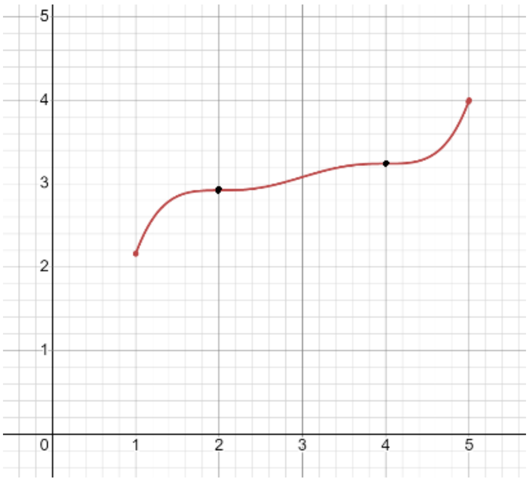
a. Max absoluto=5; Max locales= 5 y 4;min locales= 2 y 1.
b. Max locales= 4 y3; min absoluto=1; min locales= 2 y 1.

Ejercicio 8

a.

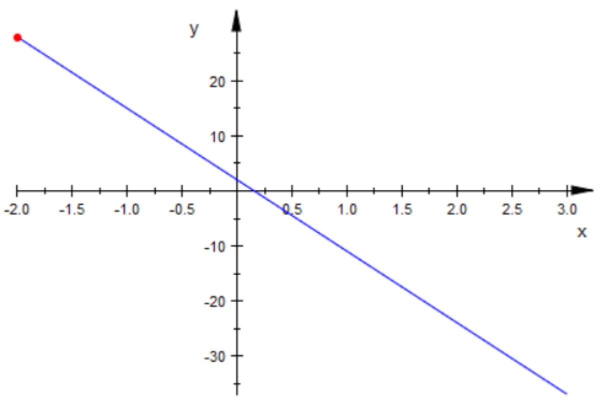


b.

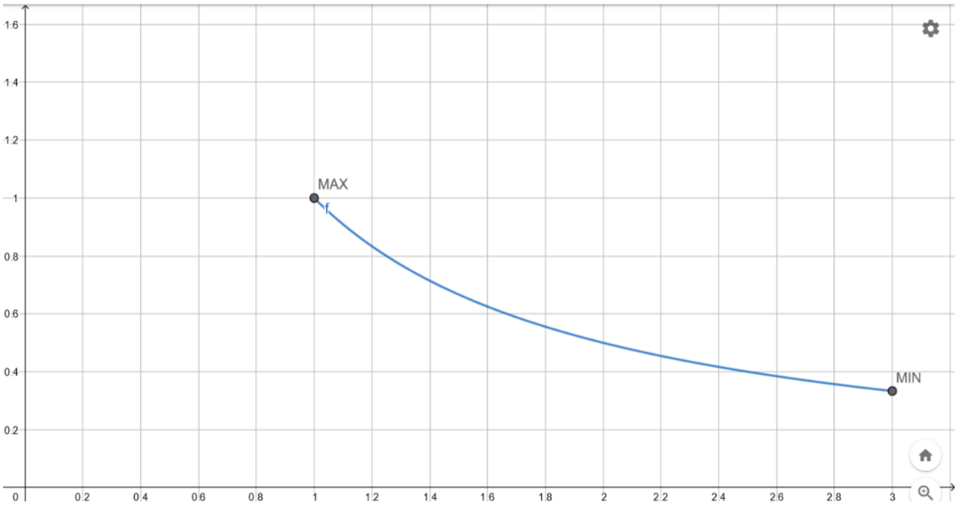


Ejercicio 9

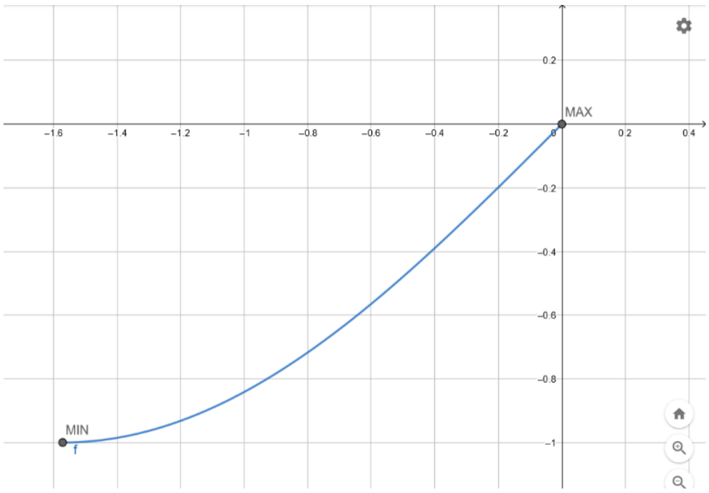
a. La función presenta un máximo absoluto en $x = -2$. El valor máximo es 28. La función no presenta mínimos.



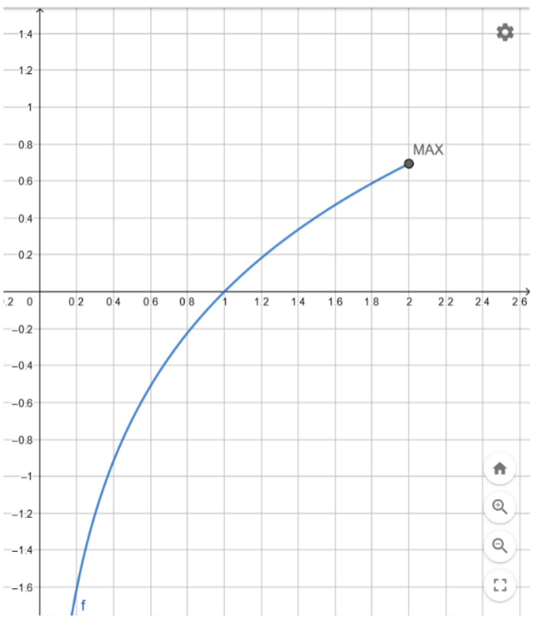
b. La función presenta un máximo absoluto en $x = 1$. El valor máximo es 1. La función presenta un mínimo absoluto en $x = 3$. El valor mínimo es 1/3.



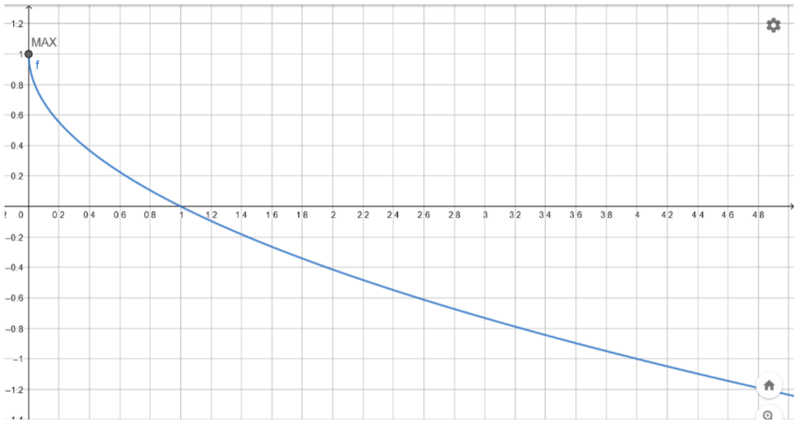
c. La función presenta un máximo absoluto en $x = 0$. El valor máximo es 0. La función presenta un mínimo absoluto en $x = -\pi/2$. El valor mínimo es -1.



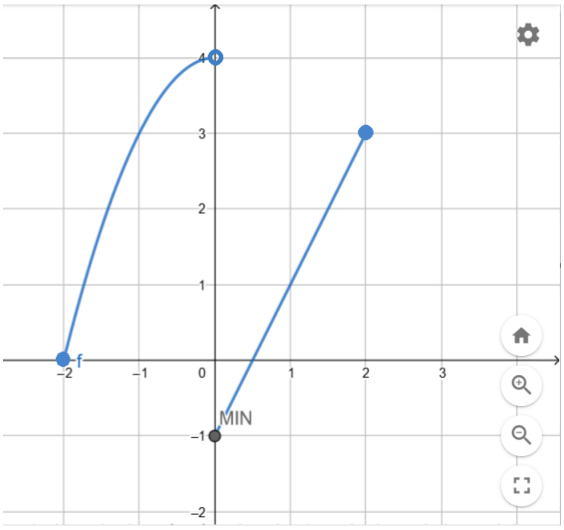
d. La función presenta un máximo absoluto en $x = 2$. El valor máximo es $ln(2)$. La función no presenta mínimos.



e. La función presenta un máximo absoluto en $x = 0$. La función no presenta mínimos.



f. La función presenta un mínimo absoluto en $x = 0$. El valor mínimo es -1. La función no presenta máximos.



Ejercicio 10

a. Los números críticos son $x_1 = 0$, $x_2 = -3 + \sqrt{24}$, $x_3 = -3 - \sqrt{24}$
b. Los números críticos son $t_1 = \frac{4}{3}$
c. Los números críticos son $p_1 = 1$.
d. Los números críticos son $x_1 = 0, x_2 = 4$.
f. Los números críticos son $x_1 = 0$

Ejercicio 11

a. El valor máximo es 113 en $x = 3$
El valor mínimo es 5 en $x = 0$
b. El valor máximo es 5,2 en $x = 0{,}2$
El valor mínimo es 2 en $x = 1$

Ejercicio 12

$c = 9/4$

Ejercicio 13

$f(1) = 0 = f(-1)$. $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ No existe valor $c/f'(c) = 0$, esto no contradice el teorema de Rolle porque $f'(x)$ no es continua en el intervalo $(-1,1)$.4,75 A

Ejercicio 14

En $x \approx 3\ y\ x \approx 6{,}3$

Ejercicio 15

La función f es continua y derivable en todo su dominio: $\{x \in R/x \neq 0\}$. Teniendo en cuenta las hipótesis del teorema del valor medio, afirmamos que f es continua sobre el intervalo cerrado $[1,3]$ y derivable en el intervalo abierto $(1,3)$.

El valor c que satisface el teorema del valor medio es: $c = \sqrt{3}$

Ejercicio 16

$f'(c) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{1}{4}$ Como $f'(c) = \frac{1}{4}$ en $x = -5$ entonces no existe $c \in (1,4)$ tal que $f'(c) = \frac{1}{4}$ $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ no es continua en el intervalo $[1,4]$. Por ende, no es aplicable el teorema del Valor Medio.

Ejercicio 18

Intervalos donde f' es positiva	$(1,3) \cup (4,+\infty)$	$(0,1) \cup (3,5) \cup (5,+\infty)$
f' no existe	$(0,5)\ y\ (4,1)$	$(0,0)$
f es cóncava hacia abajo en:	$(2,4) \cup\ (4,+\infty)$	$(0,2) \cup\ (4,5)$
Puntos de inflexión	$(2,3)$	$(2,2), (4,3), (5,4)$

Ejercicio 19

a. Figura a) f crece en (0,5); decrece en (0,1) U (5,6)
   Figura b) f crece en (0,1)U(3,5); decrece en (1,3) U (5,6)
b. Figura a) max local en x=5; min local en x=1
   Figura b) max locales en x=1 y x=5; min locales en x=3

Ejercicio 20

Coordenadas de los puntos de inflexión:

a. $\big(3, \mathrm{f}(3)\big)$ y $\big(5, \mathrm{f}(5)\big)$
b. $(2, \mathrm{f}(2)), (4, \mathrm{f}(4))$ y $(6, \mathrm{f}(6))$
c. $(1, \mathrm{f}(1))$ y $(7, \mathrm{f}(7))$

Ejercicio 21

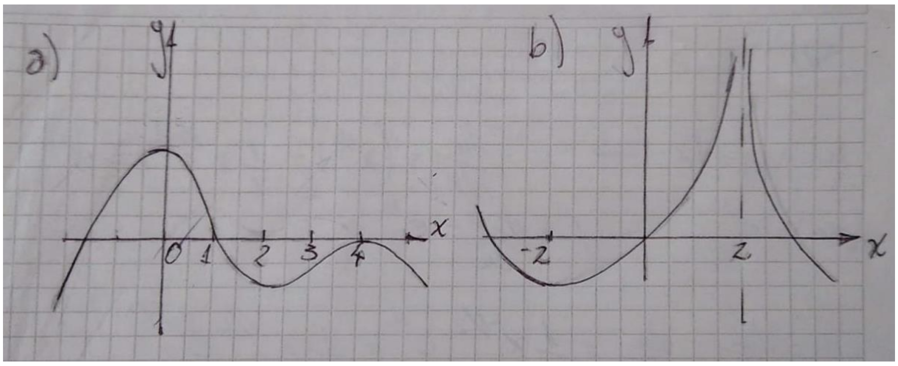
	a	b
$f(x)$	$x^4 - 2x^2 + 3$	$\frac{x}{x^2+1}$
$f'(x)$	$4x^3 - 4x$	$\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$
$f''(x)$	$12x^2 - 4$	$\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$
Creciente	$(-1,0) \cup (1,+\infty)$	$(-1,1)$
Decreciente	$(-\infty,-1) \cup (0,1)$	$(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$
Máximo	$(0,3)$	$\left(1,\frac{1}{2}\right)$
Mínimo	$(-1,2)\ y\ (1,2)$	$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$
Cóncava hacia arriba	$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}},+\infty\right)$	$(-\sqrt{3},0) \cup (\sqrt{3},+\infty)$
Cóncava hacia abajo	$\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	$(-\infty,-\sqrt{3}) \cup (0,\sqrt{3})$
Puntos de inflexión	$\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},\frac{22}{9}\right)\ y\ \left(\sqrt{\frac{1}{3}},\frac{22}{9}\right)$	$\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),(0,0),\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

	c	d
$f(x)$	$e^{2x} + e^{-x}$	$sen(x) + \cos(x)$
$f'(x)$	$2e^{2x} - e^{-x}$	$\cos(x) - sen(x)$
$f''(x)$	$4e^{2x} + e^{-x}$	$-sen(x) - \cos(x)$
Creciente	$\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3},+\infty\right)$	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$
Decreciente	$\left(-\infty,\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$
Máximo	No tiene	$\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$
Mínimo	$\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3},1.9\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$
Cóncava hacia arriba	$\boldsymbol{R}$	$\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$
Cóncava hacia abajo	Nunca	$\left(0,\frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$
Puntos de inflexión	No tiene	$\left(\frac{3\pi}{4},0\right),\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$

Ejercicio 22

Max local de f=0; min local de f=4

Ejercicio 23



Ejercicio 24

a.

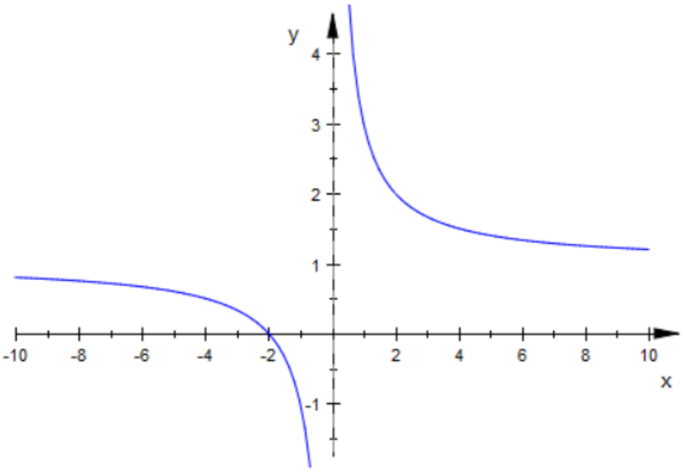
I. Intervalos de crecimiento: $(-\infty, 4)$; Intervalos de decrecimiento: $(4,6)$
II. Máximo absoluto: $4\sqrt{2}$; Mínimo: no tiene.
III. Intervalos de concavidad: cóncava hacia abajo en todo su dominio. No presenta puntos de inflexión.

b.

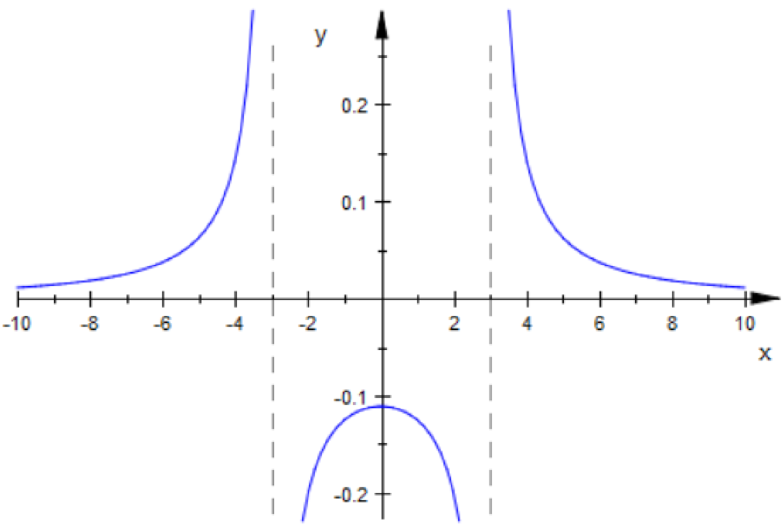
I. Intervalos de crecimiento:$(0,1)$; Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0)\mathrm{U}(1, \infty)$.
II. Máximo local: 3; Mínimo local: 0.
III. Intervalos de concavidad: cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)\mathrm{U}(0, \infty)$. No posee puntos de inflexión.

Ejercicio 25

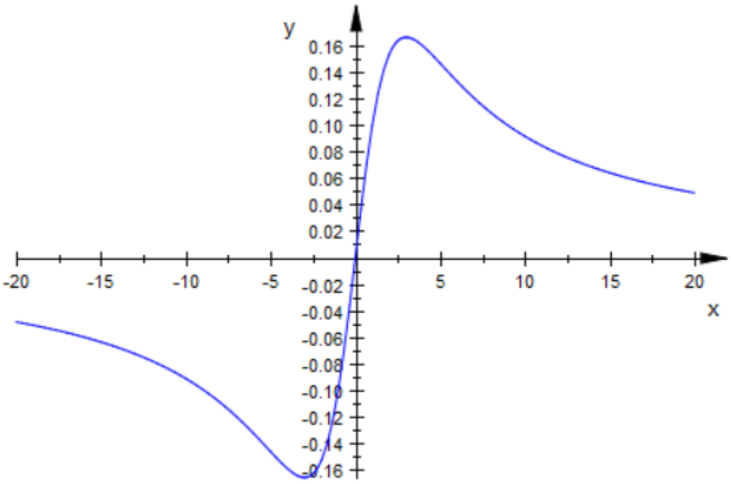
a. Números críticos: $x_1 = 0$
Intervalos de crecimiento: $No\ tiene$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = (-\infty, 0), I_2 = (0, \infty)$
Presente máximos en: $No\ tiene$
Presenta mínimos en: $No\ tiene$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = (0, \infty)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = (-\infty, 0)$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $No\ tiene$



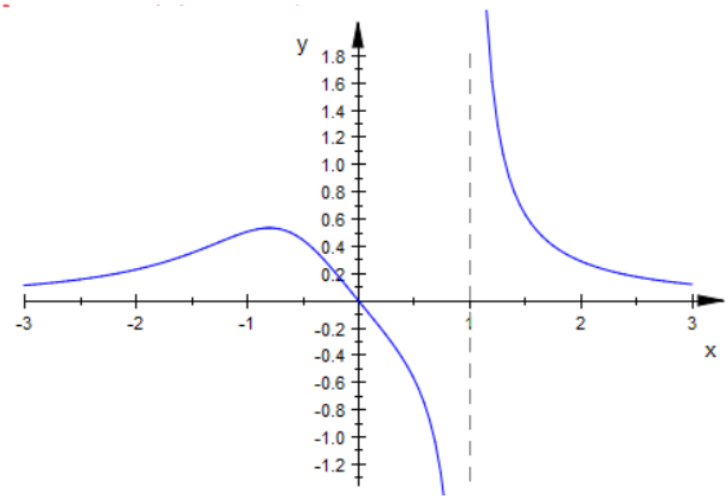
b. Números críticos: $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = (-\infty, -3), I_2 = (-3,0)$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = (0,3), I_2 = (3, \infty)$
Presente máximos en: $x_1 = 0$
Presenta mínimos en: $No\ tiene$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = (-\infty, -3), I_2 = (3, \infty)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = (-3, 3)$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $No\ tiene$



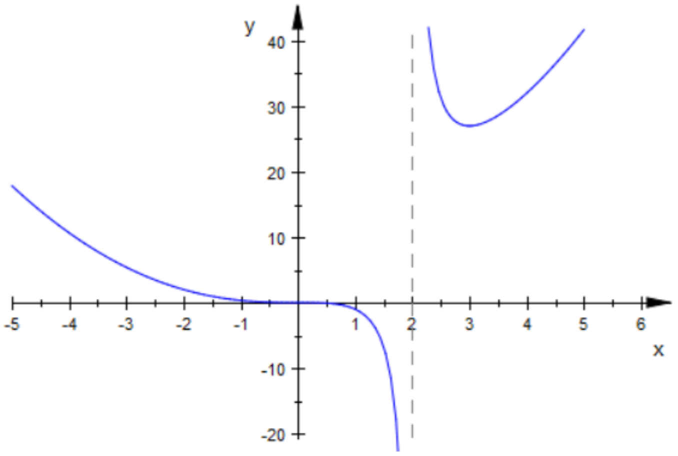
c. Números críticos: $x_1 = -3, x_2 = 3$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = (-3, 3)$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = (-\infty, -3), I_2 = (3, \infty)$
Presente máximos en: $x_1 = 3$
Presenta mínimos en: $x_1 = -3$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = \left(-\sqrt{27}, 0\right), I_2 = \left(\sqrt{27}, \infty\right)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = \left(-\infty, -\sqrt{27}\right), I_2 = \left(0, \sqrt{27}\right)$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $x_1 = -\sqrt{27}\,, x_2 = 0\;,\; x_3 = \sqrt{27}$



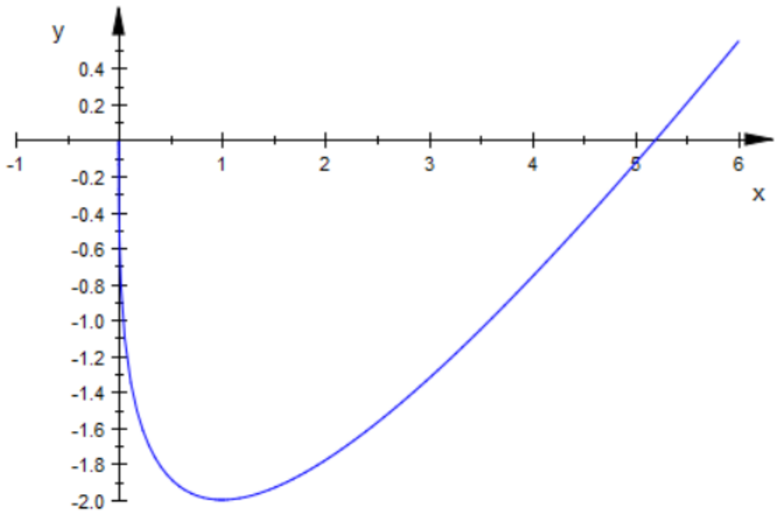
d. Números críticos: $x_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}\,, x_2 = 1$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = \left(-\infty, \sqrt[3]{-1/2}\right)$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = \left(\sqrt[3]{-1/2}, 1\right), I_2 = (1, \infty)$
Presente máximos en: $x_1 = \sqrt[3]{-1/2}$
Presenta mínimos en: $No\ tiene$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = \left(-\infty, -\sqrt[3]{2}\right), I_2 = (1, \infty)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = \left(-\sqrt[3]{2}, 0\right), I_2 = (0, 1)$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $x_1 = -\sqrt[3]{2}$



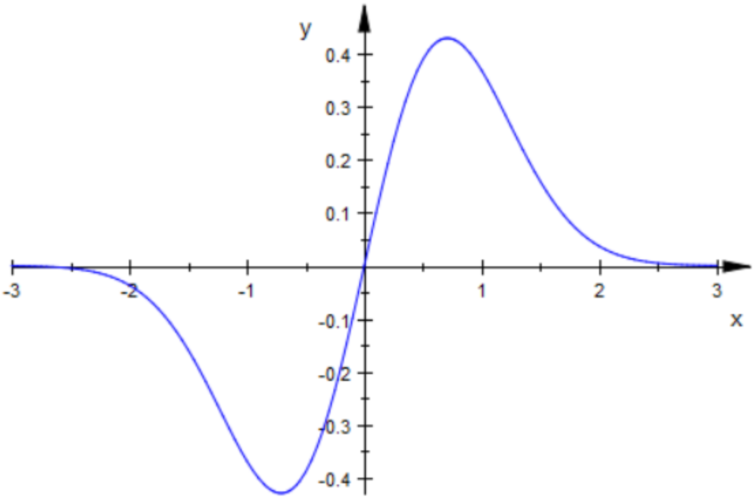
e. Números críticos: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = (3, \infty)$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = (-\infty, 0), I_2 = (0,2), I_3 = (2,3)$
Presente máximos en: $No\ tiene$
Presenta mínimos en: $x_1 = 3$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = (-\infty, 0), I_2 = (2, \infty)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = (0, 2)$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $x_1 = 0$



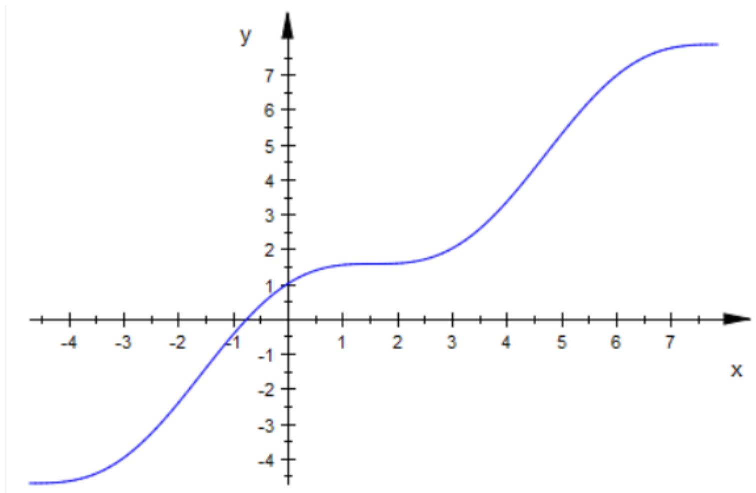
f. Números críticos: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = (1, \infty)$,
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = (0,1)$
Presente máximos en: $No\ tiene$
Presenta mínimos en: $x_1 = 1$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = (0, \infty)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $No\ tiene$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $No\ tiene$



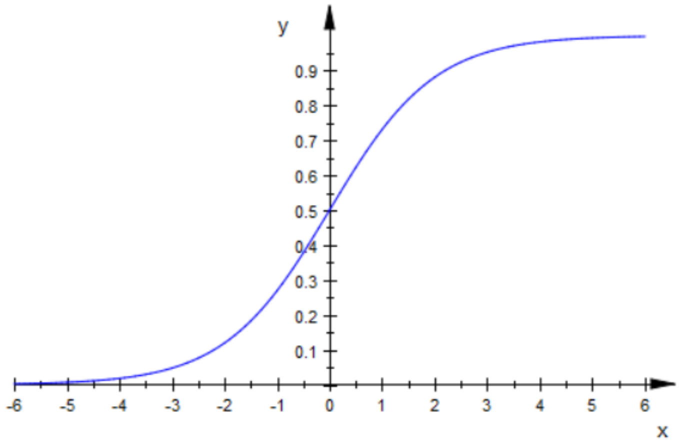
g. Números críticos: $x_1 = -\sqrt{1/2}, x_2 = \sqrt{1/2}$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = \left(-\sqrt{1/2},\ \sqrt{1/2}\right)$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = \left(-\infty, -\sqrt{1/2}\right), I_2 = \left(\sqrt{1/2}, \infty\right)$
Presente máximos en: $x_1 = \sqrt{1/2}$
Presenta mínimos en: $x_1 = -\sqrt{1/2}$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = \left(-\sqrt{3/2}, 0\right), I_2 = \left(\sqrt{3/2}, \infty\right)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = \left(-\infty, -\sqrt{3/2}\right), I_2 = \left(0, \sqrt{3/2}\right)$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $x_1 = -\sqrt{3/2}\,, x_2 = 0\ ,\ x_3 = \sqrt{3/2}$



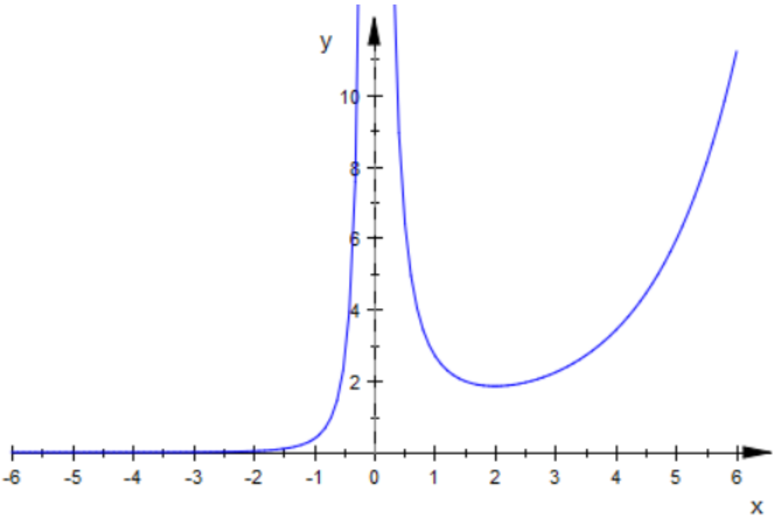
h. Números críticos: $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ con\ k \in \mathbb{Z}$
Intervalos de crecimiento: $La\ función\ es\ monotona\ creciente$
Intervalos de decrecimiento: $No\ tiene$
Presente máximos en: $No\ tiene$
Presenta mínimos en: $No\ tiene$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi(k+1)\right)$
$siendo\ k\ par\ y \in \mathbb{Z}\ o\ k = 0. Es\ decir, por\ ejemplo{:}\ k = -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi(k+1)\right)$
$siendo\ k\ impar\ y \in \mathbb{Z}, es\ decir, por\ ejemplo{:}\ k = -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k\ , x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k\ ;\ con\ k\ \in\ \mathbb{Z}$



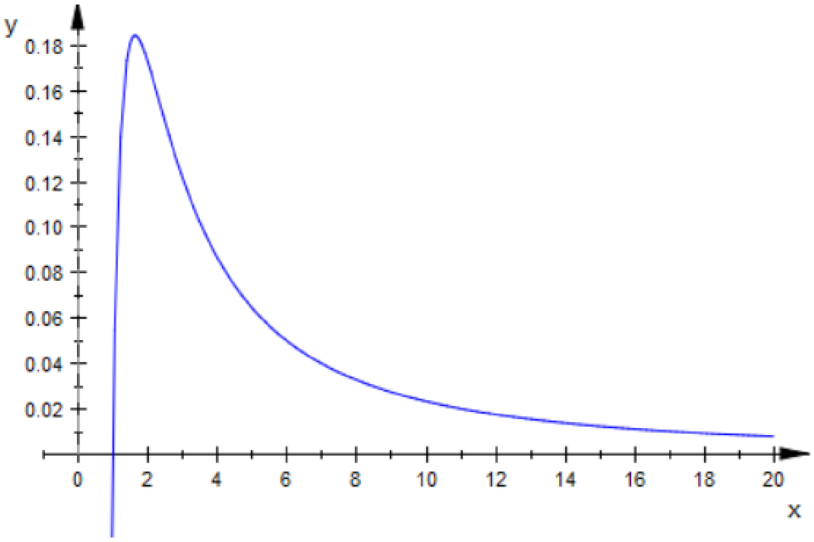
i. Números críticos: $No\ tiene$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = (-\infty, \infty), es\ decir\ es\ monotona\ creciente$
Intervalos de decrecimiento: $No\ tiene$
Presente máximos en: $No\ tiene$
Presenta mínimos en: $No\ tiene$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = (-\infty, 0)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = (0, -\infty)$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $x_1 = 0$



j. Números críticos: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = (-\infty, 0), I_2 = (2, \infty)$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = (0,2)$
Presente máximos en: $No\ tiene$
Presenta mínimos en: $x_1 = 2$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = (-\infty, 0)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = (0, \infty)$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $No\ tiene$



k. Números críticos: $x_1 = 0\, , x_2 = \sqrt{e}$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = \left(0, \sqrt{e}\right)$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = \left(\sqrt{e}, \infty\right)$
Presente máximos en: $x_1 = \sqrt{e}$
Presenta mínimos en: $No\ tiene$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = \left(\sqrt[6]{e^5}, \infty\right)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = \left(0, \sqrt[6]{e^5}\right)$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $x_1 = \sqrt[6]{e^5}$



l. Números críticos: $x_1 = \ln \sqrt[5]{2/3}$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = \left(\ln \sqrt[5]{2/3}\, , \infty\right)$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = \left(-\infty, \ln \sqrt[5]{2/3}\right)$
Presente máximos en: $No\ tiene$
Presenta mínimos en: $x_1 = \ln \sqrt[5]{2/3}$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = (-\infty, \infty)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $No\ tiene$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $No\ tiene$