Ejercicios Resueltos - Guía Práctica Nro 7: Aplicaciones de la derivadas I

A continuación, se presentan algunos ejercicios resueltos para que puedan tener presente la manera en que esperamos que realicen su producción escrita.

En este caso se presentan la resolución de los ejercicios 17, 21-a y 11-b

Ejercicio 17

17. a)

$2x+\cos(x)=0$

Sea $f(x)=2x+\cos(x)$ ⊛

⊛ por teorema del valor intermedio sabemos que existe una raíz (por ser $f(x)$ continua $\forall \mathbb{R}$)

① $f(0)=2\cdot 0+\cos(0)=1>0$

$f(-\pi/2)=2\cdot(-\pi/2)+\cos(-\pi/2)=-\pi<0$

b)

$x^3+e^x=0$

Sea $f(x)=x^3+e^x$ ⊛

① $f(0)=0^3+e^0=1>0$

$f(-1)=(-1)^3+e^{-1}=-1+1/e<0$

② para demostrar que solo tiene una raíz, aplicamos el teorema de Rolle por contradicción

a) $f'=2-\operatorname{sen}(x)\geq 1\ \forall x$

b) $f'=3x^2+e^x>0\ \forall x$

entonces al no ser nunca posible que $f'=0$ (y f cumplir con las 2 primeras hipótesis*) la 3ª no se cumple. por lo que no posee otra raíz.

Hipótesis*

a)

① $f(x)=2x+\cos(x)$ es continua en $[-\pi/2, 0]$

② $f'(x)=2-\operatorname{sen}(x)$ existe ($f(x)$ es derivable) en $(-\pi, 0)$

b)

① $f(x)=x^3+e^x$ es continua en $[-1,0]$

② $f'(x)=3x^2+e^x$, existe ($f(x)$ es derivable) en $(-1,0)$

Ejercicio 21b

Hoja:

INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. (PRUEBA CREC/DECREC)

MÁX Y MIN (CRITERIO DE LA DERIVADA 1ra) (*)

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1(x^2+1)-x.(2x)}{(x^2+1)^2} = \boxed{\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}}$$

PUNTOS CRÍTICOS ¿$f'(x)=0$? y ¿$f'(x) \nexists$?

$f'(x)=0$ en $x=+1$ y $x=-1$ $\quad$ $f'(x) \exists\ \forall x \in \mathbb{R}$.

INTERVALO	PTO PRUEBA	SIGNO $f'(x)$	Conclusión sobre $f(x)$
$(-\infty,-1)$	$x=-2$	$-$	DECRECIENTE EN $(-\infty,-1)$
$(-1,1)$	$x=0$	$+$	CRECIENTE EN $(-1,1)$
$(1,+\infty)$	$x=2$	$-$	DECRECIENTE EN $(1,+\infty)$

(*) En $x=-1$ la función pasa de ser Decreciente a Creciente, por lo que en $x=-1$ $f(x)$ presenta un mínimo Local. Análogamente en $x=1$, $f(x)$ presenta un máximo Local. Min $(-1,-1/2)$ y Max $(1,1/2)$

CONCAVIDAD (Prueba de la concavidad) y PUNTOS DE INFLEXIÓN

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2+1)^2-(-x^2+1)\,2.(x^2+1).2x}{\left[(x^2+1)^2\right]^2}$$

FACTOR COMÚN

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)\left[-2x(x^2+1)-(-x^2+1).4x\right]}{(x^2+1)^4} = \boxed{\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}}$$

PUNTOS CRÍTICOS ¿$f''(x)=0$? ¿$f''(x)=\exists$?

$f''(x)=0$ en $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ y $x=\sqrt{3}$ $\quad$ $f''(x) \exists\ \forall x \in \mathbb{R}$.

INTERVALO	Pto Pr.	SIGNO $f''(x)$	Conclusión sobre $f(x)$
$(-\infty,-\sqrt{3})$	$x=-3$	$-$	Cóncava hacia Abajo en $(-\infty,-\sqrt{3})$
$(-\sqrt{3},0)$	$x=-1$	$+$	Cóncava hacia Arriba en $(-\sqrt{3},0)$
$(0,\sqrt{3})$	$x=1$	$-$	Cóncava hacia Abajo en $(0,\sqrt{3})$
$(\sqrt{3},+\infty)$	$x=3$	$+$	Cóncava hacia Arriba en $(\sqrt{3},+\infty)$

Como en $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ y $x=\sqrt{3}$ $f(x)$ está definida y cambia la concavidad de la función, en $f(x)$ hay tres pto de inflexión.

Notas: $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; $(0,0)$ y $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Ejercicio 11-b

11) Encuentre los valores máximo y mínimo absoluto de f sobre el intervalo dado:

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $[0,2; 4]$

Resolución:

Para encontrar los valores extremos usaremos el método del intervalo cerrado (Sección 4.1 del Stewart - página 278).

Calculamos $f'(x)$ y buscamos los puntos críticos en $(0,2; 4)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Para hallar los puntos críticos planteamos:

- $f'(x) = 0$
- $f'(x) \nexists$

- $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$$\frac{1}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 1 \nearrow \boxed{x_1 = 1} \checkmark \qquad \searrow x_2 = -1$$

- $f'(x) \nexists$ cuando $x = 0$ → No los consideramos ya que no están dentro del intervalo.

Evaluamos f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

$$f(0{,}2) = 0{,}2 + \frac{1}{0{,}2} = 0{,}2 + \frac{10}{2} = \boxed{5{,}2}$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = \boxed{2}$$

$$f(4) = 4 + \frac{1}{4} = 4{,}25$$

Máximo absoluto en $x = 0{,}2$ y vale $5{,}2$.
Mínimo absoluto en $x = 1$ y vale 2.