

Resolución Guía Complementaria III

Ejercicio 1

Para qué valores de a y b la función $f(x) = x^3 + ax + b$ es estrictamente creciente en todo $\text{Dom} f$.

Solución

Para determinar si la función f es estrictamente creciente analizamos el signo de su derivada en todo su dominio.

Su derivada es $f'(x) = 3x^2 + a$. La cual es positiva, es decir $f'(x) > 0$, en todo su dominio y para todo $a > 0$.

Luego f es estrictamente creciente para todo real $a > 0$ y b cualquier número real.

Ejercicio 2

Las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 5$ en $x = 1$ y $x = -1$, ¿son paralelas?

Solución

Para responder calculamos la pendiente de las rectas tangentes en $x = 1$ y $x = -1$.

Su derivada es, $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x$ y al evaluarla en -1 y 1 , tenemos:

$$f'(-1) = 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 4(-1) = 3 \quad \text{y} \quad f'(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) = 3.$$

Como los valores coinciden, entonces las rectas tangentes tienen igual pendiente, es decir son paralelas.

Ejercicio 3

Hallar el valor de b para que la función $f(x) = 3x^2e^{-bx}$ tenga un extremo relativo en $x = 2$. Para el valor de b encontrado, determinar si es un máximo o un mínimo relativo y hallar el valor extremo.

Solución

Para que $f(x) = 3x^2e^{-bx}$ tenga un extremo relativo en $x = 2$, entonces $f'(2) = 0$ o $f'(2)$ no existe.

Derivamos, $f'(x) = 6xe^{-bx} + 3x^2e^{-bx}(-b) = 3xe^{-bx}(2 - xb)$, y podemos observar que $f'(x)$ existe para cualquier valor real x , por lo que sólo planteamos $f'(2) = 0$.

$$f'(2) = 3(2)e^{-b(2)}(2 - (2)b) = 12e^{-2b}(2 - 2b) = 0 \Rightarrow (2 - 2b) = 0 \Rightarrow \mathbf{b = 1}$$

Para que la función f tenga un extremo relativo en $x = 2$, $\mathbf{b = 1}$.

Sea $f(x) = 3x^2e^{-x}$. Para clasificar el valor extremo, se puede aplicar el **Criterio de la segunda derivada**

A partir de $f'(x) = e^{-x}(6x - 3x^2)$ [reescribo la derivada antes de derivar], derivamos y obtenemos

$$f''(x) = -e^{-x}(6x - 3x^2) + e^{-x}(6 - 6x) = e^{-x}(3x^2 - 12x + 6)$$

$f''(2) = e^{-2}(-6)$ Como $f''(2) < 0$, concluimos que $\mathbf{f(2)}$ es un **máximo local**.

Ejercicio 4

Calcule los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x^3 e^{2x}$

Analizamos el límite de cada término:

*) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty$ Reescribo Aplicamos L'Hospital

*) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^{-2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-2e^{-2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{4e^{-2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{8e^{-2x}} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$

Indeterminación Tipo $-\infty \cdot 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x^3 e^{2x} = -\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$ Aplicamos L'Hospital

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{4x} - 4}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16e^{4x}}{2} = 8$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{4x} - 1 - 4x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Indeterminación
Tipo $0/0$

$\lim_{x \rightarrow 0} (4e^{4x} - 4) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1/x - 1}{\ln x + (x-1)(1/x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{-1/x^2}{\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right) + (x-1)(-1/x^2)} \right) = \frac{-1}{2}$$

Ejercicio 5

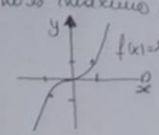
Determinar si cada una de las proposiciones es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera explicar por qué. Si es falsa, explicar por qué o de un ejemplo que refute la proposición.

- Si $f'(c) = 0$, entonces f tiene un máximo o un mínimo local en c .
- Si f es continua sobre $(a; b)$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto en $f(c)$ y un mínimo absoluto en $f(d)$ en algunos c y d en $(a; b)$.
- Si $f''(2) = 0$, entonces $(2; f(2))$ es un punto de inflexión en la curva $y = f(x)$.
- Si f y g son funciones crecientes sobre un intervalo I , entonces $f - g$ es creciente sobre I .
- f derivable y creciente en todo su dominio, entonces $f'(x) > 0$ para todo x de su dominio.

- f. La gráfica de la función $f(x) = x^{1/2}$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio.
 g. Sea f derivable en todo su dominio. Si $f(x) > 0$ en todo su dominio entonces $f'(x) > 0$ en todo su dominio.

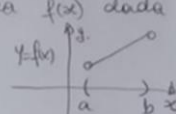
Solución:

a) **Contrajemplo**
 Sea $f(x) = x^3$, su derivada es $f'(x) = 3x^2$
 $f'(0) = 0$ y $f(0)$ no es máximo ni mínimo



Conclusión:
 La afirmación es FALSA

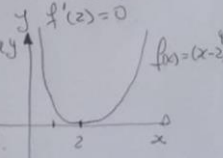
b) **Contrajemplo**
 Sea $f(x)$ dada en la gráfica



la función en el intervalo (a,b) no tiene máximo ni mínimo

Conclusión: la afirmación es FALSA

c) **Contrajemplo**
 Sea $f(x) = (x-2)^4$ su derivada es
 $f'(x) = 4(x-2)^3$ y $f'(2) = 0$
 su segunda derivada y
 $f''(x) = 12(x-2)^2$
 es siempre positivo en todo su dominio.
 Por lo tanto es cóncava hacia arriba en todo su dominio. No cambia de concavidad. No tiene PI en $(2, f(2))$

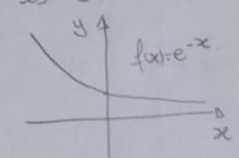


d) **Contrajemplo**
 Sea $f(x) = \ln x$ función creciente en $(0, +\infty)$
 $g(x) = x$ función creciente en $(0, +\infty)$
 $h(x) = (f-g)(x) = \ln x - x$
 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1$
 $h'(x) < 0$ en el intervalo $(0, 1)$
 es decir que $f-g$ no es creciente en $(0, +\infty)$
Conclusión: la afirmación es FALSA

e) **Contrajemplo**
 Sea $f(x) = x^3$ función derivable y creciente en todo su dominio
 Dom $f: \mathbb{R}$
 $f'(x) = 3x^2$ y $f'(0) = 0$
 entonces $f'(x)$ no es > 0 en todo su dominio
Conclusión: la afirmación es FALSA

f) $f(x) = x^{-1/2}$, Dominio: Dom $f: \mathbb{R}^+$
 $f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-1/2-1} = -\frac{1}{2} x^{-3/2}$
 $f''(x) = -\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot x^{-3/2-1} = \frac{3}{4} x^{-5/2}$
 $f''(x) > 0$ para todo $x \in \text{Dom } f: \mathbb{R}^+$
 por lo tanto es cóncava hacia arriba en todo su dominio
Conclusión: la afirmación es VERDADERA

g) **Contrajemplo**
 Sea $f(x) = e^{-x}$, Dom: $\mathbb{R}$
 $f(x) > 0$ en todo su dominio
 $f'(x) = -e^{-x}$ es < 0 en todo su dominio



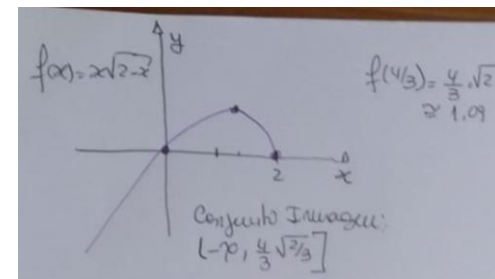
Conclusión:
 la afirmación es FALSA

Ejercicio 6

$f(x) = x\sqrt{2-x}$

- Domínio: $2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$
Domf: $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$
- Intersección y sus coordenadas
Ej. y: $f(0)=0 \rightarrow P_1(0,0)$
Ej. x: $f(x)=0 \rightarrow x\sqrt{2-x}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow P_1(0,0)$
 $x=2 \rightarrow P_2(2,0)$
- No es función par ni impar
- Valores críticos para f'
 $f'(x) = \sqrt{2-x} + x \cdot \frac{1}{2}(-1) = \frac{2(2-x) - x}{2\sqrt{2-x}}$
 $f'(x) = \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}$
Punto $2\sqrt{2-x}$
• $f'(x)=0 \rightarrow \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}=0 \rightarrow 4-3x=0 \rightarrow x=4/3$
• $f'(x)$ no pte en $x=2$
f crece $\frac{f' > 0}{x < 4/3}$ f decrece $\frac{f' < 0}{x > 4/3}$ Valores de prueba
• $f'(0) > 0$
• $f'(1.5) < 0$
- Intervalo de crecimiento: $(-\infty, 4/3)$
Intervalo de decrecimiento: $(4/3, 2)$
 $f(4/3)$ máximo relativo

- Valores críticos para la segunda derivada
 $f''(x) = \frac{-3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2-x} - (4-3x) \cdot \frac{1}{2}(-1)}{(2\sqrt{2-x})^2}$
 $= \frac{-6\sqrt{2-x} + 4-3x}{4(2-x)}$
 $f''(x) = \frac{-8+3x}{4(2-x)^{3/2}}$
 $f''(x)=0 \rightarrow -8+3x=0 \rightarrow x=8/3$ es mayor que 2 $\notin$ Domf
 $f'(x)$ no pte en $x=2$
f es cóncava hacia abajo
 $f'' < 0$
- Asintotas
Horizontal: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{2-x} = -\infty$ No tiene A.H.
Vertical: (análisis que ocurre cuando $x \rightarrow 2^+$)
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} x\sqrt{2-x} = 0$ No tiene A.V.



b) $f(x) = (x-2)e^{-x}$

- Domínio: $\mathbb{R}$
- Intersección y sus coordenadas
Ej. y: $f(0) = -2 \rightarrow P_1(0,-2)$
Ej. x: $f(x)=0 \rightarrow (x-2)e^{-x}=0 \rightarrow x=2 \rightarrow P_2(2,0)$
- No es función par ni impar
- Valores críticos para f'
 $f'(x) = e^{-x} + (x-2)e^{-x}(-1) = e^{-x}(1-x+2)$
 $f'(x) = (3-x)e^{-x}$
• $f'(x)=0 \rightarrow x=3$
• $f'(x)$ pte para todo el dominio
f crece $\frac{f' > 0}{x < 3}$ f decrece $\frac{f' < 0}{x > 3}$ Valores de prueba
• $f'(0) > 0$
• $f'(4) < 0$
- Intervalo de crecimiento: $(-\infty, 3)$
Intervalo de decrecimiento: $(3, \infty)$
• $f(3)$ es máximo local
- Valores críticos para f''
 $f''(x) = -e^{-x} + (3-x)e^{-x}(-1) = e^{-x}(-1-3+x)$
 $f''(x) = e^{-x}(x-4)$
 $f''(x)=0$ cuando $x=4$
 $f''(x)$ pte para todo x del dominio
Cóncava hacia abajo $\frac{f'' < 0}{x < 4}$ Cóncava hacia arriba $\frac{f'' > 0}{x > 4}$ Valores de prueba
• $f''(0) < 0$
• $f''(5) > 0$

- Intervalo de concavidad hacia arriba $(4, \infty)$
Intervalo de concavidad hacia abajo $(-\infty, 4)$
- Punto de inflexión $(4, f(4))$
- Asintotas
Horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-2)e^{-x} = 0$ (usando $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{e^x} = 0$ por regla de L'Hôpital)
Vertical: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)e^{-x} = -\infty$ No tiene A.V.
- Gráfico de $f(x) = (x-2)e^{-x}$ mostrando un punto de inflexión en $(4, f(4))$ y un punto de máximo local en $(3, f(3))$. El eje y está etiquetado con $f(3) = e^{-3}$ y $P_2(4, f(4))$. El eje x está etiquetado con x . El conjunto imagen es $[-\infty, e^{-3}]$.
- Conjunto Imagen: $[-\infty, e^{-3}]$

Ejercicio 7

Encontrar dos números positivos tales que la suma del primero y el doble del segundo es 108 y el producto es un máximo.

Solución

Sean m y n los números positivos buscado.

El producto entre ellos debe ser máximo. En primer lugar llamamos P al producto, entonces $P = mn$ es la función a maximizar, pero esta función depende de dos variables. Si leemos el enunciado los números m y n no son cualquier par de números positivos, deben verificar que: la suma del primero, m , y el doble del segundo, $2n$, es 108 lo que nos lleva a la expresión $m + 2n = 108$. Despejando m de esta ecuación tenemos $m = 108 - 2n$. Reemplazando en la función P , obtenemos la expresión: $P(n) = (108 - 2n)n$ luego la función depende sólo de n .

Luego debemos hallar el máximo de la función $P(n) = (108 - 2n)n$ en el intervalo $(0, 54)$ pues m debe ser positivo.

$P'(n) = 108 - 4n$, hallamos valores críticos $P'(n) = 108 - 4n = 0$ para $n = 27$ Si aplicamos el

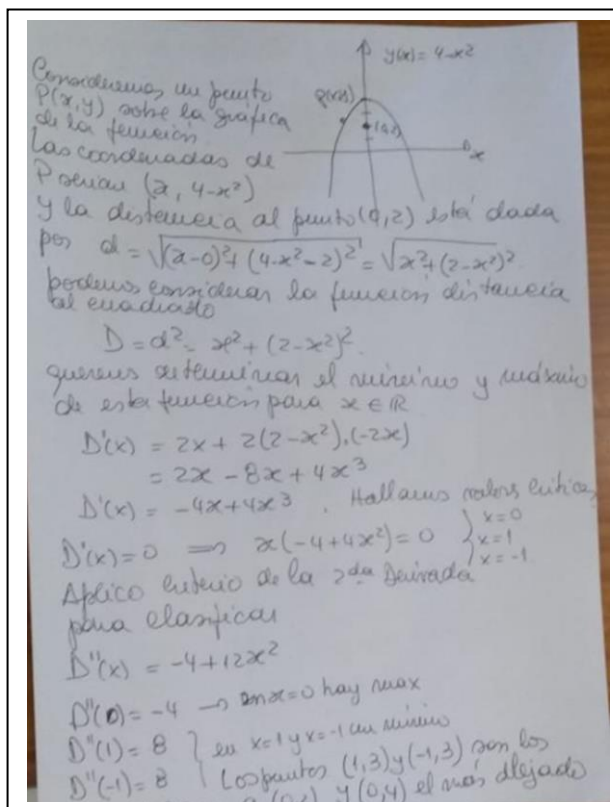
criterio de la derivada segunda

Vemos que $P''(n) = -2$, es decir la derivada segunda es negativa para cualquier valor de n . Conclusión $P(27)$ es un máximo absoluto.

Los números buscados son $n = 27$ y $m = 54$

Ejercicio 8

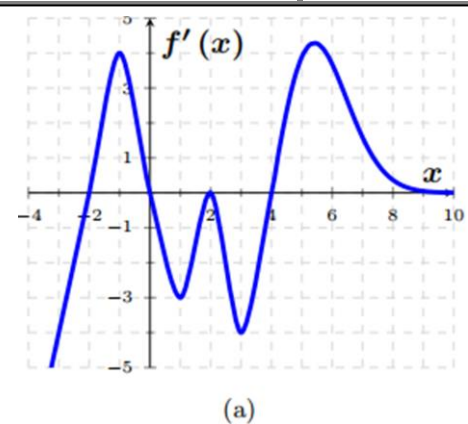
Qué puntos sobre la gráfica $y(x) = 4 - x^2$ son más cercanos al punto $(0; 2)$?



Ejercicio 9

En la figura 1a se ilustra la derivada f' de una función f .

- Sobre que intervalos f es creciente o decreciente?
- Para que valores de x la función f tiene máximos locales o mínimos locales?
- Indique, si los tiene los puntos de inflexión $(a; f(a))$, determinando el valor de $x = a$.
- Sobre que intervalos f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?



- a) La función es:

*Decreciente en los intervalos: $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$ y $(2, 4)$, en estos intervalos la **derivada primera es positiva**.*

*Creciente en los intervalos $(-2, 0)$ y $(4, +\infty)$, en estos intervalos la **derivada primera es negativa**.*

- b) En $x = 2$ y en $x = 4$ la función presenta un mínimo local. En $x = 0$ un máximo local.

- c) * En $(-1, f(-1))$ es un **punto de inflexión** ya que:

$f''(-1) = 0$ (f' tiene una recta tangente horizontal en -1),

$f''(x) > 0$ antes de -1 (f' crece antes de -1) y

$f''(x) < 0$ después de -1 (f' decrece después de -1).

* En $(1, f(1))$ es un punto de inflexión ya que:

$f''(1) = 0$ (f' tiene una recta tangente horizontal en -1),

$f''(x) < 0$ antes de 1 (f' decrece antes de 1) y

$f''(x) > 0$ después de 1 (f' crece después de 1).

* En $(3, f(3))$ es un punto de inflexión ya que:

$f''(3) = 0$ (f' tiene una recta tangente horizontal en 3),

$f''(x) < 0$ antes de 3 (f' decrece antes de 3) y

$f''(x) > 0$ después de 3 (f' crece después de 3).

* En $(4.5, f(4.5))$ es un punto de inflexión ya que:

$f''(4.5) = 0$ (f' tiene una recta tangente horizontal en 4.5),

$f''(x) > 0$ antes de 4.5 (f' crece antes de 4.5) y

$f''(x) < 0$ después de 4.5 (f' decrece después de 4.5).

- d) La función es:

Cóncava hacia abajo en los intervalos: $(-1, 1)$, $(2, 3)$ y $(4.5, +\infty)$, en estos intervalos la derivada primera decrece por lo que se deduce que la derivada segunda es negativa.

Cóncava hacia arriba en los intervalos: $(-\infty, -1)$, $(1, 2)$ y $(3, 4.5)$ en estos intervalos la derivada primera crece por lo que se deduce que la derivada segunda es positiva.