Facultad de Ingeniería

Cálculo en una Variable

Bioingeniería
Licenciatura en Bioinformática
Ingeniería en Transporte

Tema: Aplicaciones dela derivada Parte II

Derivada

Sección 4.4: Formas indeterminadas y regla de L'Hospital

Sección 4.5: Trazado de curvas

Sección 4.7: Problemas de Optimización

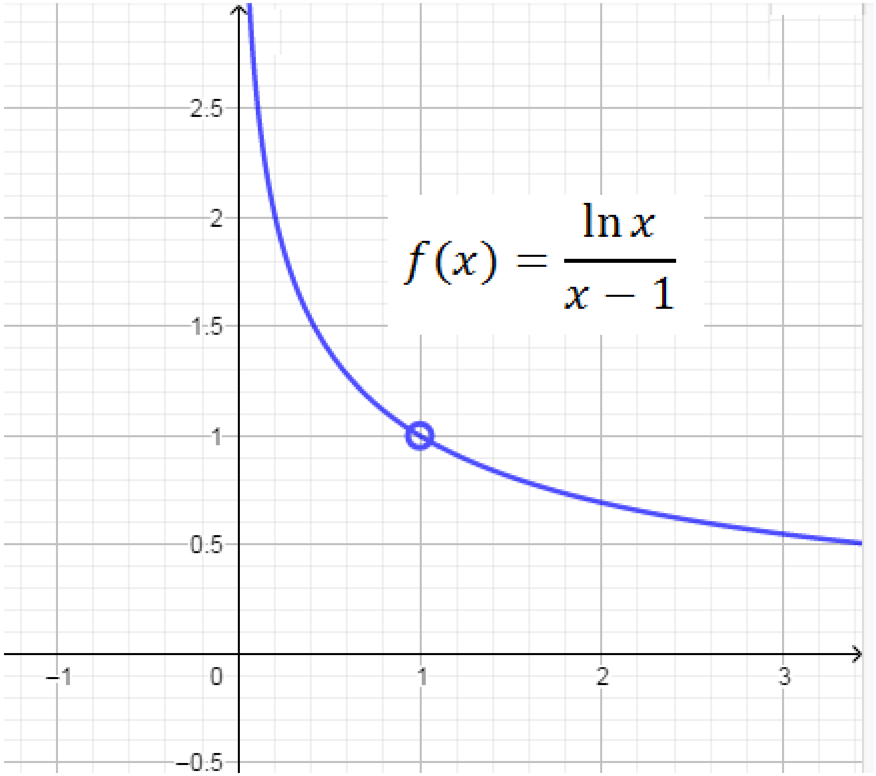
Sección 4.4: Formas indeterminadas y regla de L'Hospital

Regla de L´Hospital

Consideremos

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} =$$

Si bien el límite existe su valor no es evidente porque el límite del numerador es 0 y el límite del numerador es 0.



Regla de L´Hospital

En general el límite.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} =$$

donde $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *puede o no existir* y se llama ***forma indeterminada*** del ***tipo* 0/0 .**

Para funciones racionales

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{(x+1)} = \frac{1}{2}$$

Se factoriza el numerador y el denominador

Simplifico factores

Evalúo, la función es continua en 1

Regla de L´Hospital

En general el límite.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} =$$

donde $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *puede o no existir* y se llama ***forma indeterminada*** del ***tipo* 0/0** .

Pero si tenemos

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} =$$

Consideramos la siguiente Regla

Regla de L´Hospital

Regla de l'Hospital Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo abierto I que contiene a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si existe el límite del lado derecho (o es ∞ o $-\infty$).

Regla de L´Hospital

Regla de l'Hospital Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo abierto I que contiene a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si existe el límite del lado derecho (o es ∞ o $-\infty$).

NOTA 1 La regla de l'Hospital señala que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se cumplan con las condiciones dadas. Es especialmente importante verificar las condiciones impuestas a los límites de f y g antes de utilizar la regla de l'Hospital.

Regla de L´Hospital

Regla de l'Hospital Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo abierto I que contiene a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si existe el límite del lado derecho (o es ∞ o $-\infty$).

NOTA 2 La regla de l'Hospital también es válida para límites unilaterales y límites al infinito o al infinito negativo; es decir, "$x \to a$" puede ser sustituido por cualquiera de los símbolos $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

Regla de L´Hospital

Regla de l'Hospital Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo abierto I que contiene a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si existe el límite del lado derecho (o es ∞ o $-\infty$).

NOTA 3 Para el caso especial en que $f(a) = g(a) = 0$, f' y g' son continuas y $g'(a) \neq 0$, es fácil ver por qué la regla de l'Hospital es cierta.

Indeterminaciones

Veamos nuestro ejemplo

Aplicamos L´Hospital

Evaluamos directamente pues $y = \frac{1}{x}$ es continua en 1

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

Analizamos el límite del numerador y el del denominador

$$\left.\begin{array}{l} Num.: \lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0 \\ Den.: \lim\limits_{x \to 1} (x-1) = 0 \end{array}\right\}$$

Indeterminada tipo 0 /0

Formas indeterminadas tipo 0 /0

Ejemplo: Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=$

Solución

Aplicamos L´Hospital

Evaluamos directamente pues $y=2e^{2x}$ es continua en 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2e^{2(0)}=2$$

$$\left.\begin{array}{l} Num.:\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-1)=e^{2(0)}-1=0 \\ Den.:\lim\limits_{x\to 0}x=0 \end{array}\right\}$$

Indeterminada tipo 0 /0

Formas indeterminadas tipo ∞/∞

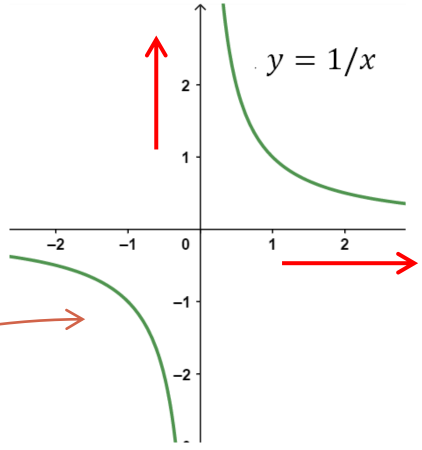
Ejemplo : a) Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} =$

b) Calcular $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} =$

Solución a)

Aplicamos L´Hospital

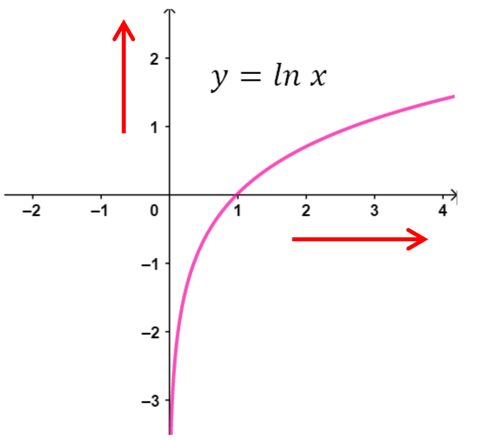
Vemos comportamiento $\boldsymbol{y = 1/x}$



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} Num.: \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ Den.: \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\}$$

Indeterminada tipo ∞ / ∞



Indeterminaciones

Formas indeterminadas tipo ∞/∞

Ejemplo : a) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} =$

b) Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2} =$

Solución b)

Aplicamos L´Hospital

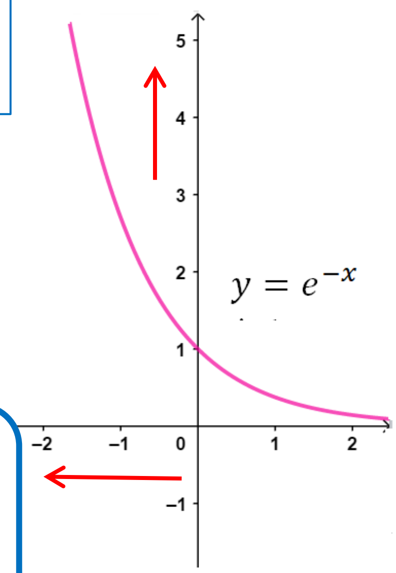
Aplicamos L´Hospital

Vemos comportamiento $y = e^{-x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{2} = \infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Num.}: \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \\ \textit{Den.}: \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\}$$ ***Indeterminada tipo ∞ / ∞***

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Num.}: \lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-x} = -\infty \\ \textit{Den.}: \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty \end{array}\right\}$$ ***Indeterminada tipo ∞ / ∞***



Indeterminaciones

Productos indeterminados

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ (ó - ∞)

¿cuál es el valor del $\lim_{x \to a} [f(x).\, g(x)]$, *si existe ?*

Estos límites se llaman ***Formas indeterminadas del tipo 0.*** ∞

Estrategia : expresar $\boldsymbol{f.g}$ como un cociente de la forma ***:***

$$\boldsymbol{f.g = \frac{f}{1/g}} \quad \textbf{ó} \quad \boldsymbol{f.g = \frac{g}{1/f}}$$

Y lo transformamos en una *indeterminada de tipo 0/0 ó tipo ∞/∞ para luego aplicar L'Hospital*

Forma indeterminada tipo 0. ∞

Ejemplo: Calcular $\lim_{x \to \infty} (e^{-x} \sqrt{x})$

Indeterminaciones

Forma indeterminada tipo 0. ∞

Ejemplo: Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x}\sqrt{x}\right)$

Sea $f(x)=e^{-x}$; $g(x)=\sqrt{x}$

estrategia

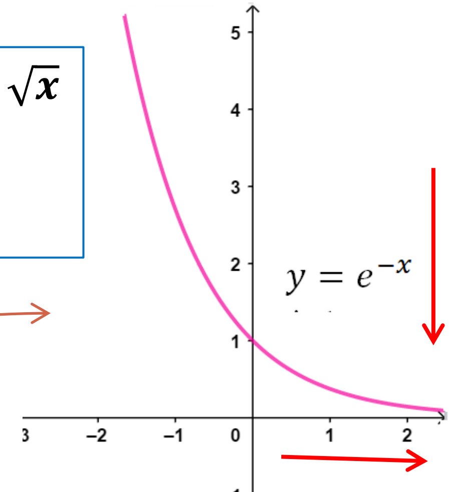
$$f.g=\frac{g}{1/f}=\frac{\sqrt{x}}{1/e^{-x}}=\frac{\sqrt{x}}{e^{x}}$$

Solución

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{1/e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{x}}=$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}=0\\ \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=+\infty\end{array}\right\}$$

Indeterminada tipo 0. ∞



Vemos comportamiento $y=e^{-x}$

Aplicamos L´Hospital

Reescribo

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/(2\sqrt{x})}{e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}e^{x}}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}Num.\!:\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty\\ Den.\!:\lim\limits_{x\to\infty}e^{x}=\infty\end{array}\right\}$$

Indeterminada tipo ∞ / ∞

Indeterminaciones

Diferencias indeterminadas

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ entonces el límite

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$$

se llama ***formas indeterminadas del tipo*** ∞ **-** ∞.

Formas indeterminadas tipo ∞ - ∞.

Ejemplo:

Calcular $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

Indeterminaciones

Potencias indeterminados

Estas surgen de

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ***indeterminada tipo 0^0***

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ***indeterminada tipo ∞^0***

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ ***indeterminada tipo 1^∞***

Potencias indeterminadas

Indeterminaciones del tipo : 0^0 , ∞^0 , 1^∞

Formas indeterminadas 0^0

Ejemplo:

Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}(\,x)^x =$

Formas indeterminadas ∞^0

Ejemplo:

Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}(x)^{\frac{1}{x}} =$

Formas indeterminadas 1^∞

Ejemplo:

Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x =$

Sección 4.5: Trazado de curvas

¿Cómo graficar una función ?

Paso 1*:* Haga un análisis antes de utilizar cálculo.
(a) Indique el *dominio* de la función.
(b) Verifique la *simetría* con respecto al eje *y* y al origen. (¿La función es par o impar?)
(c) Encuentre las *intersecciones con los ejes de coordenadas*.
Paso 2*:* Análisis con cálculo.
(a) Encontrar los puntos críticos y determinar en dónde la gráfica es *creciente* y en dónde es *decreciente*.
(b) Clasifique los puntos críticos para saber si son *máximos* o *mínimos locales*.
(c) Utilice la segunda derivada para determinar dónde la gráfica es *cóncava hacia arriba* y dónde es *cóncava hacia abajo*; localice los *puntos de inflexión*.
(d) Encuentre las *asíntotas*.
Paso 3: Haga un bosquejo de la gráfica.

❖ *Gráfica de funciones*

Analice la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ y dibuje su gráfica

- Dominio: $Domf = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0 \}$

- Intersección ejes: $Eje\ x$: $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Longrightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1, P_x(1,0)$

  $Eje\ y$: $y = f(0)$ no está definido, no hay intersección con el eje y

- Puntos críticos (Veamos donde $f'(x) = 0$ y donde $f'(x)$ no existe)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - lnx\ .1}{x^2} = \frac{1 - lnx}{x^2}$$

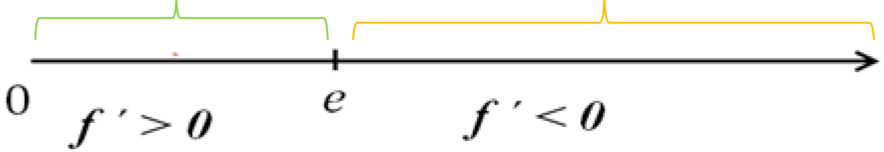
Planteo : $* \ f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \dfrac{1-lnx}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

$*$ Considerando el dominio de f, $f'(x)$ existe en todo su dominio.

El único valor crítico es $x = e$.

la derivada es positiva en este intervalo, entonces la función crece en el intervalo

la derivada es negativa en este intervalo, entonces la función decrece en el intervalo



Valores de prueba

$f'(1) = \dfrac{1 - ln1}{1^2} = 1 > 0$

$f'(10) = \dfrac{1 - ln10}{10^2} < 0$

- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

  Intervalo de crecimiento: (0, e)

  Intervalo de decrecimiento: (e, ∞)

- Cambio de signo de la derivada en $x = e$, entonces $f(e)$ es un máximo local.

❖ *Gráfica de funciones*

Analice la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ y dibuje su gráfica

- Puntos críticos de $f''(x)$ (Veamos donde $f''(x) = 0$ y donde $f''(x)$ no existe)

$$f'(x) = \frac{1-lnx}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2-(1-lnx\ ).2x}{x^4} = \frac{-3x+2xlnx}{x^4} = \frac{x(-3+2lnx)}{x^4} = \frac{-3+2lnx}{x^3}$$

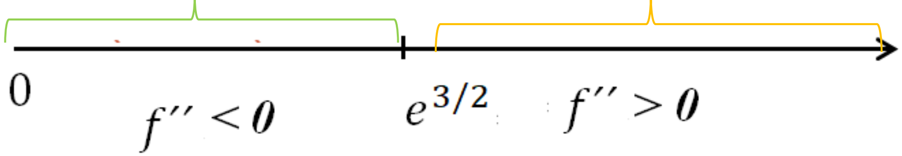
Planteo : $* \ f''(x) = 0 \ \Rightarrow \frac{-3+2lnx}{x^3} = 0 \Rightarrow -3 + 2\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 3/2 \Rightarrow x = e^{3/2}$

$*$ Considerando el dominio de *f*, $f''(x)$ existe en todo su dominio.

El único valor crítico es $x = e^{3/2}$.

f´´ es negativa en este intervalo, entonces la función es cóncava hacia abajo en el intervalo

f´´ es positiva en este intervalo, entonces la función es cóncava hacia arriba en el intervalo



Valores de prueba

$f''(1) = \frac{-3+2ln1}{1^3} = -3 < 0$

$f''(100) = \frac{-3+ln100}{10^3} > 0$

- Intervalos de Concavidad

  Intervalo de Concavidad hacia abajo: (0, $e^{3/2}$)

  Intervalo de Concavidad hacia arriba: ($e^{3/2}$, ∞)

- Cambio de Concavidad en $x = e^{3/2}$, entonces $P\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$ es un punto de inflexión.

❖ *Gráfica de funciones*

Analice la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ y dibuje su gráfica

- Cálculo de asíntotas

Asíntota Horizontal
Como el dominio es $\mathbb{R}^+$, sólo analizo cuando $x \longrightarrow +\infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ ***Asíntota horizontal y = 0*** cuando $x \longrightarrow +\infty$

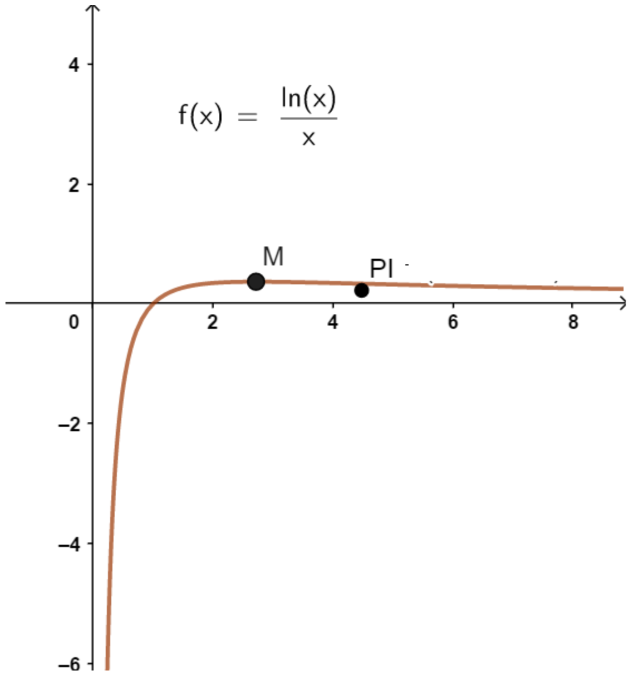
Asíntota Vertical
Como el dominio es $\mathbb{R}^+$, sólo analizo cuando $x \longrightarrow 0^+$

- $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}.\, lnx = -\infty$ ***Asíntota vertical x = 0*** cuando $x \longrightarrow 0^+$

❖ Gráfica de funciones

Analice la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ y dibuje su gráfica

- Dominio: $Domf = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0 \}$
- Intersección ejes: *Eje x*: $P_x(1,0)$ *Eje y*: no hay intersección con el eje y
- ***Intervalo de crecimiento: (0, e)***
  Intervalo de decrecimiento: (e, ∞)
- $f(e)$ máximo local.
- ***Intervalo de Concavidad hacia abajo: (0, $e^{3/2}$)***
  Intervalo de Concavidad hacia arriba: ($e^{3/2}$, ∞)
- $\mathrm{P}\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$ punto de inflexión.
- ***Asíntotas: Asíntota horizontal y = 0*** cuando $x \longrightarrow +\infty$
  Asíntota vertical x = 0 cuando $x \longrightarrow 0^{+}$



- Conjunto Imagen: $\mathrm{Im}f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq 1/e \}$

Aplicaciones de la derivada

❖ *Gráfica de funciones*

Analice las siguientes funciones y dibuje su gráfica.

a)$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

b)$f(x) = xe^{-x^2}$

b)$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

b)$f(x) = 2\sqrt{x} - x$

Sección 4.7: Problemas de Optimización

Pasos a tener en cuenta :

Paso 1: Haga un dibujo del problema y asigne variables idóneas para las cantidades importantes.

Paso 2: Escriba una fórmula para la función objetivo Q que se maximizará o minimizará, en términos de las variables .

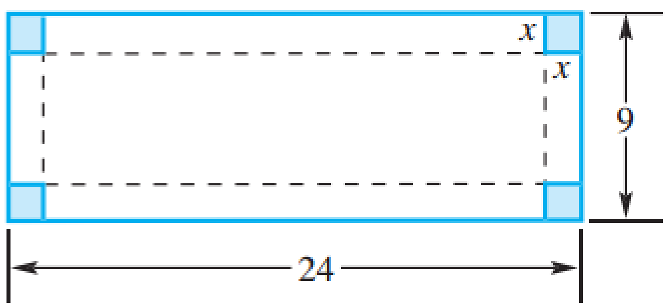
Paso 3: Utilice las condiciones del problema para eliminar todas, excepto una de estas variables, y por consiguiente expresar a Q como una función de una sola variable.

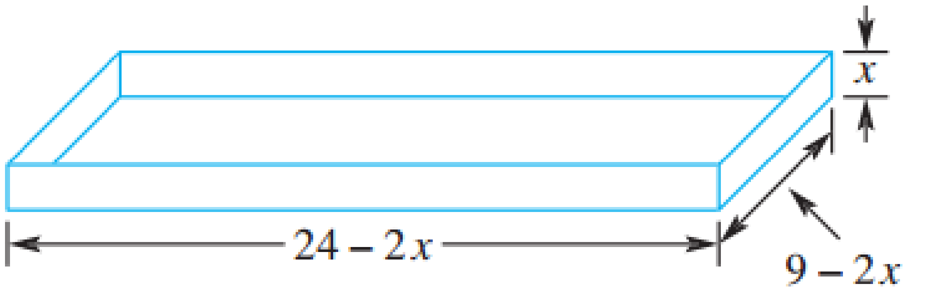
Paso 4: Encuentre los puntos críticos (fronterizos, estacionarios, singulares).

Paso 5: Sustituya los valores críticos en la función objetivo o bien utilice la teoría de la última sección (es decir, los criterios de la primera o segunda derivada) para determinar el máximo o el mínimo.

Problema

Una caja rectangular se fabrica con una pieza de cartón de 24 pulgadas de largo por 9 de ancho, de la cual se cortan cuadrados idénticos a partir de las cuatro esquinas y se doblan los lados hacia arriba. Determine las dimensiones de la caja de volumen máximo. ¿Cuál es este volumen?





•

Figura de análisis

Problema

Determine las dimensiones de la caja de volumen máximo. ¿Cuál es este volumen?

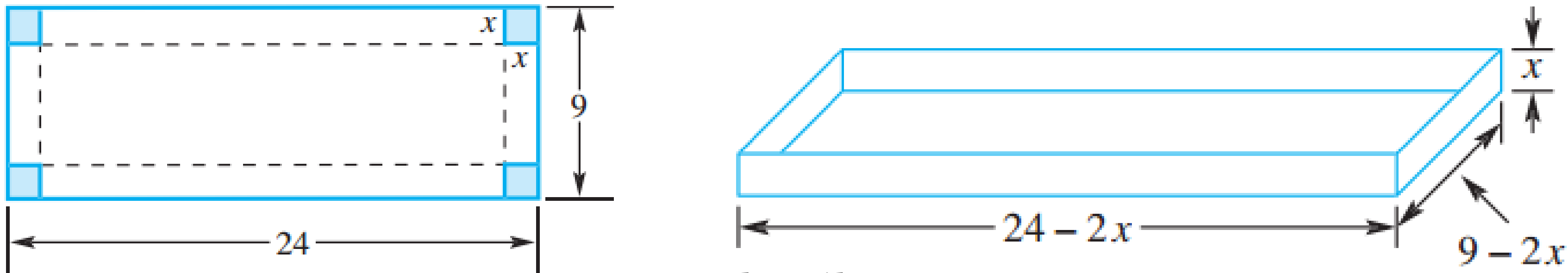


Figura de análisis

Volumen: $V = Superficie\ de\ la\ base \times altura$

$$V = (24 - 2x)(9 - 2x)x = (216 - 66x + 4x^2)x = 4x^3 - 66x^2 + 216x$$

$V(x) = 4x^3 - 66x^2 + 216x$, dominio del modelo $0 \leq x \leq 4.5$

Objetivo: Determinar el máximo de $V(x) = 4x^3 - 66x^2 + 216x$, en $0 \leq x \leq 4.5$

$$V\,'(x) = 12x^2 - 132x + 216$$

Valores críticos:

$V\,'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 132x + 216 = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $\cancel{x = 9}$

Para saber si es un máximo local aplico el criterio de la segunda derivada.

$V\,''(x) = 24x - 132 \Rightarrow V\,''(2) = 24(2) - 132 = -84$

Como $V\,''(2) = -84 < 0$ entonces hay un valor máximo local en $x=2$.

Respuesta

Las dimensiones de la caja para tener un volumen máximo es: base de 20 pulgadas× 5 pulgadas y altura 2 pulgadas. El volumen máximo es 200 pulgadas^3

Aplicaciones de la derivada

❖ *Problemas* de Optimización

Problema 1

Un granjero tiene 100 metros de cerca de alambre con la cual planea construir dos corrales adyacentes. ¿Cuáles son las dimensiones que encierran el área máxima?

Problema 2

Determine los puntos *P* y *Q* en la curva $y = \frac{x^2}{4} en\ 0 \leq x \leq \sqrt{3}$, que están más cerca y más lejos del punto (0, 4). *Sugerencia:* el álgebra es más sencilla si considera el cuadrado de la distancia requerida en lugar de la distancia misma.

Bibliografía

- STEWART, James, (2012): *“Cálculode una variable- Trascendentes y tempranas”* - 7ma edición - Cengage – Learning – México.