Ejercicios Resueltos - Guía Práctica Nro 8: Aplicaciones de la derivadas II

A continuación, se presentan algunos ejercicios resueltos para que puedan tener presente la manera en que esperamos que realicen su producción escrita.

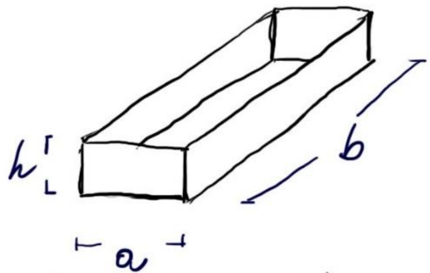
En este caso se presentan la resolución de los ejercicios 13, 5d y 12.

Ejercicio 13

→ Restricción

13. Un contenedor rectangular de almacenamiento sin tapa ha de tener un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es dos veces el ancho. El material para la base cuesta 10 pesos por metro cuadrado y el material para los costados cuesta 6 pesos por metro cuadrado. Encuentre el costo de los materiales que hagan más barato el contenedor.

F.O. ↓ Costo ↓ minimizar



Restricción:

$a \cdot b \cdot h = 10 m^3$

$b = 2 \cdot a$

$\text{Costo} = \$10\,(a\,b) + \$6 \cdot h\,(2a + 2b)$

$\text{Costo} = C_{(a)} = \$10\,(2a^2) + \$6\,\frac{10}{2a^2}\,(2a + 4a)$

$C_{(a)} = 20\,a^2 + \frac{180}{a} = \frac{20\,a^3 + 180}{a}$

$C'_{(a)} = \frac{60a^3 - (20\,a^3 + 180)}{a^2} = \frac{40a^3 - 180}{a^2}$

$\frac{40a^3 - 180}{a^2} = 0 \Rightarrow a^3 = 4{,}5$

$a = \sqrt[3]{9/2} \cong 1{,}65$

Int

$(0, \sqrt[3]{9/2}$

$(\sqrt[3]{9/2}, +\infty$

SIGUE EN LA OTRA PAGINA

La
tro
sto

b

Rtd Dimensiones:

- $a = \sqrt[3]{9/2} \cong 1{,}65$ m
- $b = 2a = 2\sqrt[3]{9/2} \cong 3{,}3$ m
- $h = \dfrac{5}{(9/2)^{2/3}} \cong 1{,}83$ m

con un Costo de $\boxed{\$163{,}54}$

Int	(Costo)'	Conclusión
$\left(0, \sqrt[3]{9/2}\right)$	$-$	decrece
$\left(\sqrt[3]{9/2}, +\infty\right)$	$+$	crece

$\Big\}$ en $a = \sqrt[3]{9/2}$ existe un mínimo

$$\text{Costo}\left(\sqrt[3]{9/2}\right) = \frac{20\,(9/2)^{3/3} + 180}{(9/2)^{1/3}} \cong \boxed{\$163{,}54}$$

EJERCICIO 5d EN LA OTRA PAGINA

Ejercicio 5d

$f(x) = x \cdot \sqrt{2-x^2}$

① $\text{Dom} f : [-\sqrt{2} \, ; +\sqrt{2}]$

② INT. CON LOS EJES

Eje y $(x=0)$

$f(0) = 0 \cdot \sqrt{2-0^2} = 0$

Pto $(0,0)$

Eje x $(y=0)$

$x\sqrt{2-x^2} = 0$

Si $x=0$

Pto $(0,0)$

Si $\sqrt{2-x^2} = 0$

$x = \pm\sqrt{2}$

Ptos $(-\sqrt{2},0)$ y $(\sqrt{2},0)$

③ Asíntotas

Verticales (Producto de funciones continuas)

No tiene

Horizontales (Limitado su dominio)

No tiene.

④ INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. Máx y Mín.

(PRUEBA DE CREC/DECREC) (CRITERIO 1er DERIVADA)

$f'(x) = \sqrt{2-x^2} + x \frac{1}{2}(2-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = \sqrt{2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} =$

$\boxed{f'(x) = \frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}}$

Puntos críticos

$f'(x) = 0$ en $x=1$ y $x=-1$

$f'(x) \nexists$ en $x = -\sqrt{2}$ y $x = +\sqrt{2}$

INTERVALO	Pto Pr	Signo $f'(x)$	Conclusión sobre $f(x)$
$(-\sqrt{2}; -1)$	$-1,2$	$-$	Decreciente en $(-\sqrt{2}, -1)$
$(-1; 1)$	0	$+$	Creciente en $(-1, 1)$
$(1; +\sqrt{2})$	$1,2$	$-$	Decreciente en $(1, +\sqrt{2})$

Por criterio de la derivada 1ra, en $x=-1$ hay mínimo local y en $x=1$ hay máximo local.

Mínimo $(-1; f(-1)) = (-1, -1)$

Máximo $(1, f(1)) = (1; 1)$

5) INTERVALOS DE CONCAVIDAD. PUNTOS DE INFLEXIÓN

(PRUEBA DE LA CONCAVIDAD) (DEFINICIÓN)

$$f''(x)=\frac{-4x\cdot\sqrt{2-x^2}-(2-2x^2)\,\frac{1}{2}\cdot(2-x^2)^{-1/2}\,(-2x)}{2-x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-4x\cdot\sqrt{2-x^2}+\frac{x(2-2x^2)}{\sqrt{2-x^2}}}{2-x^2}=\frac{\frac{-4x(2-x^2)+2x-2x^3}{\sqrt{2-x^2}}}{2-x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-8x+4x^3+2x-2x^3}{(2-x^2)^{3/2}}=\boxed{\frac{-6x+2x^3}{(2-x^2)^{3/2}}}$$

$f''(x)=0$ en $x=0$ [también en $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$ pero están excluidos del dominio.]

$f''(x)\not\exists$ en $x=-\sqrt{2}$ y $x=+\sqrt{2}$

INTERVALO	Pto Pr.	signo $f''(x)$	Conclusión sobre $f(x)$
$(-\sqrt{2};\ 0)$	-1	$+$	Cóncava hacia arriba
$(0,\ \sqrt{2})$	1	$-$	Cóncava hacia abajo

En $x=0$ hay punto de Inflexión. Pto $(0,0)$

6) Gráfica. IMAGEN.

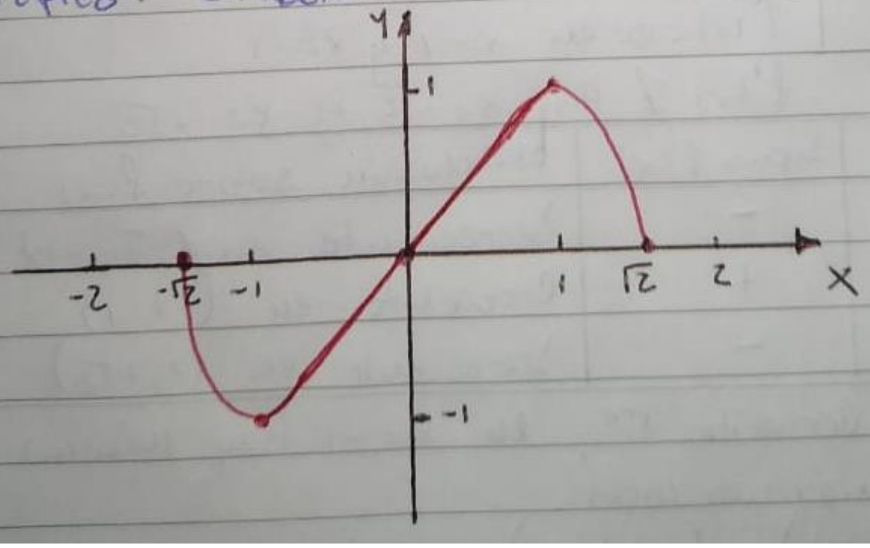
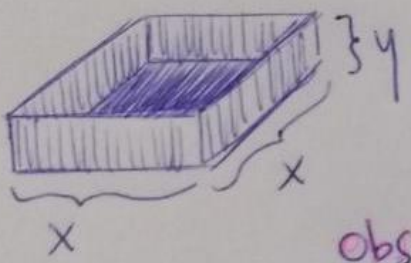


IMAGEN: $[-1,1]$

Ejercicio 12

12 Si se dispone de $1200\ cm^2$ de material para hacer una caja con base cuadrada y sin tapa: encuentre el mayor volumen de la caja.

Planteo y resolución



Al ser cuadrada, el ancho y el largo miden lo mismo (x); y (alto)

obs: x e y deben ser mayores que cero.

Área total (AT): $A_{base} + A_{lados}$ (no posee tapa)

$$A_T = x.x + 4xy = \boxed{x^2 + 4xy = 1200\ cm^2}$$

Volumen: $x.x.y = \boxed{x^2.y}$

Al tener que maximizar el volumen, buscamos expresarlo en función de una sola variable: despejamos la variable y de la expresión del área y la reemplazamos en la expresión de volumen.

$$x^2 + 4xy = 1200$$

$$4xy = 1200 - x^2$$

$$y = \frac{1200 - x^2}{4x} = \frac{300}{x} - \frac{1}{4}x$$

En volumen:

$$V(x) = x^2 \cdot \overbrace{\left(\frac{300}{x} - \frac{1}{4}x\right)}^{y} = 300x - \frac{1}{4}x^3$$

$V(x)$ es nuestra función a maximizar.

Para hallar el mayor volumen posible calculamos $V'(x)$ y encontramos puntos críticos:

$$V'(x) = 300 - \frac{3}{4}x^2 \quad ; \quad \left.\begin{matrix} V'(x) \nexists \circledast \\ V'(x) = 0 \end{matrix}\right\} \text{Puntos críticos}$$

$\circledast$ No existen valores de x tal que $V'(x)$ no exista.

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 300 - \frac{3}{4}x^2 = 0$$

$$\frac{3}{4}x^2 = 300$$

$$x^2 = 300 \cdot \frac{4}{3} = 400$$

$$x = \pm\sqrt{400} \quad \begin{matrix} \nearrow \boxed{x_1 = 20} \\ \searrow \cancel{x_2 = -20} \end{matrix}$$

Sólo consideramos $x_1 = 20$ ya que su valor NO puede ser negativo.

De este modo, si $x = 20$ podemos encontrar el valor de y:

$$y = \frac{300}{20} - \frac{20}{4} = 15 - 5 = 10 \; ; \; \boxed{y = 10}$$

Entonces, el volumen será máximo cuando $\boxed{x = 20 \text{ cm}}$ e $\boxed{y = 10 \text{ cm}}$.

$$V_{máximo} = (20 \text{ cm})^2 \cdot 10 \text{ cm} = 400 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm}$$

$$\boxed{V_{máximo} = 4000 \text{ cm}^3}$$