Guía Práctica Nro 8: Aplicaciones de la Derivadas II

Respuestas

Ejercicio 1

a. Indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$"
b. 0
c. 0
d. ∞
e. Indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$"
f. Indeterminación del tipo "$0.\infty$"

Ejercicio 2

a. 5
b. 2
c. 0
d. $-\frac{1}{2}$
e. ∞
f. 0
g. $\frac{1}{\ln(3)}$
h. 0
i. $\frac{1}{2}$
j. e^{-2}
k. e
l. $e^{-\frac{1}{2}}$

Ejercicio 3

Cuando intentamos determinar el valor del límite $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}$, nos encontramos frente a una indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$", por lo que podemos aplicar la regla de l´Hospital, $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}$.

Aquí nos volvemos a encontrar nuevamente con una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, por lo que nuevamente aplicamos la regla, quedando la expresión $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}$

Así, sucesivamente, podemos ir aplicando la regla hasta que observamos que en el denominador de la expresión la variable desaparece, quedando solo una constante, mientras que en el denominador sigue apareciendo la función exponencial. En este último límite, podemos determinar que éste no existe, dado que la expresión tiende a infinito.

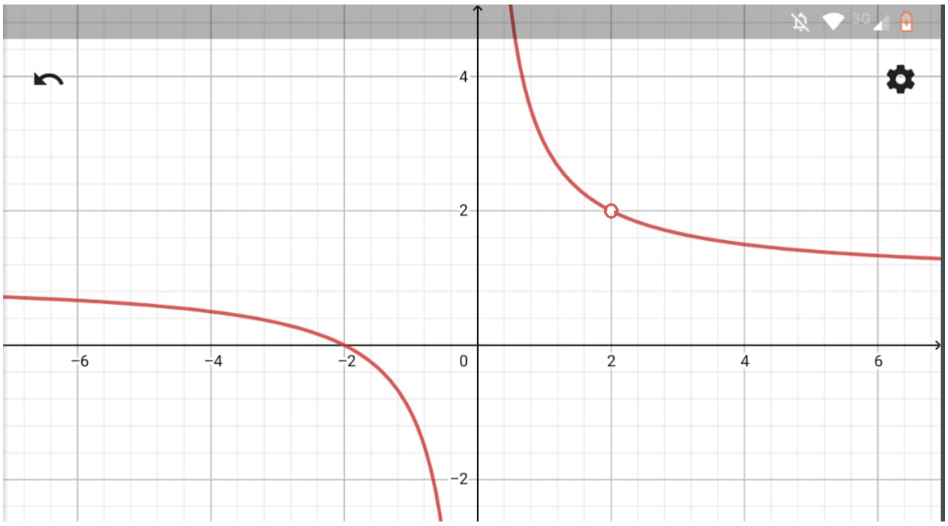
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)\ldots 2.1}=\infty$$

Ejercicio 4

Al aplicar la regla del l'Hospital para resolver el límite obtenemos de nuevo una indeterminación, por lo que podemos volver a aplicar la regla del l'Hospital y nos encontramos con que llegamos a la expresión original, por lo que podemos darnos cuenta que va a ser imposible resolver dicho limite con dicha regla ya que después de un par de iteraciones volvemos a encontrarnos con la expresión original. En este caso podríamos aplicar las estrategias algebraicas vistas previamente como dividir numerador y denominador por el mayor grado del denominador. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$

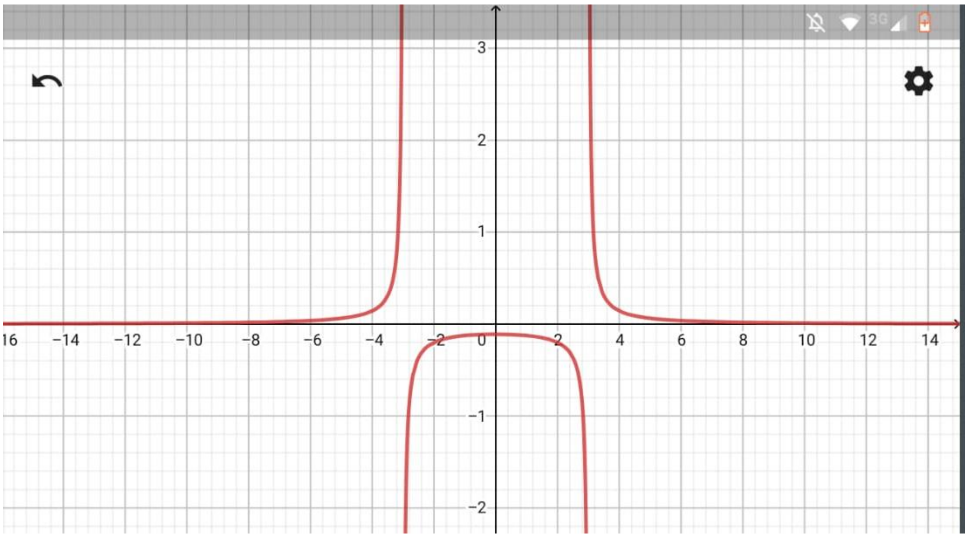
Ejercicio 5

a. Dominio:D: $\mathbb{R} - \{0; 2\}$
Intersección con el eje x: $x_1 = -2$
Intersección con el eje y: $No\ tiene$
Asíntota horizontal: $y = 1$
Asíntota vertical: $x = 0$
Números críticos: $No\ tiene$
Intervalos de crecimiento: $No\ tiene$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = (-\infty, 0), I_2 = (0{,}2), I_3 = (2, \infty)$
Presente máximos en: $No\ tiene$
Presenta mínimos en: $No\ tiene$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = (0{,}2), I_2 = (2, \infty)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = (-\infty, 0)$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $No\ tiene$

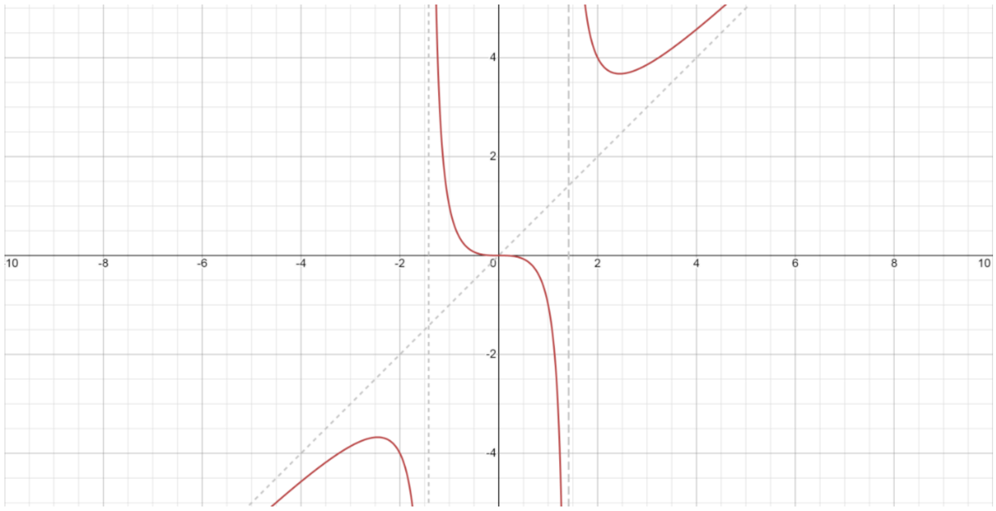


b. Dominio:D: $\mathbb{R} - \{-3; 3\}$
Intersección con el eje x: $No\ tiene$
Intersección con el eje y: $y_1 = -1/9$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Asíntota vertical: $x_1 = -3\ , x_2 = 3$
Números críticos: $x_1 = 0$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = (-\infty, -3), I_2 = (-3{,}0)$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = (0{,}3), I_2 = (3, \infty)$

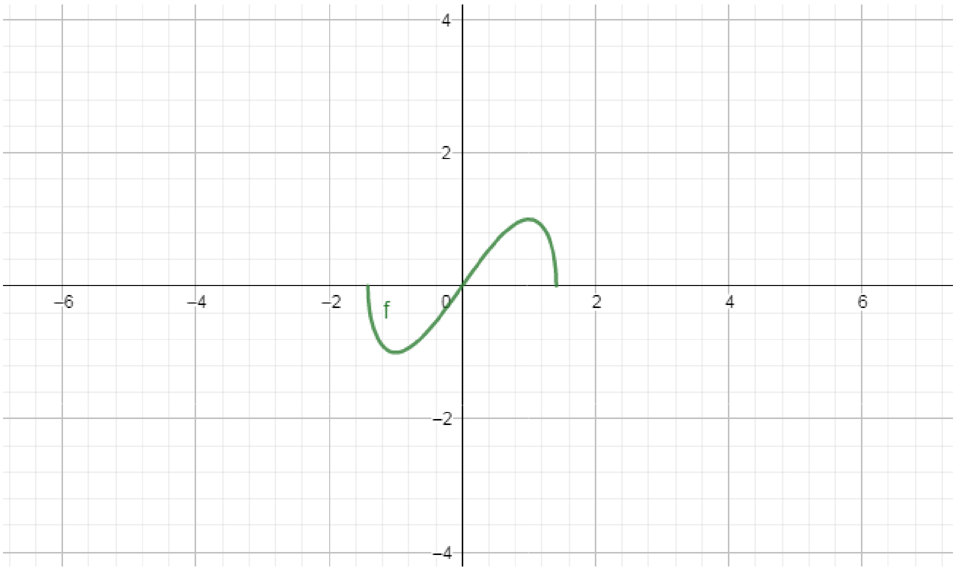
Presente máximos en: $x_1 = 0$
Presenta mínimos en: $No\ tiene$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = (-\infty, -3), I_2 = (3, \infty)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = (-3,3)$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $No\ tiene$



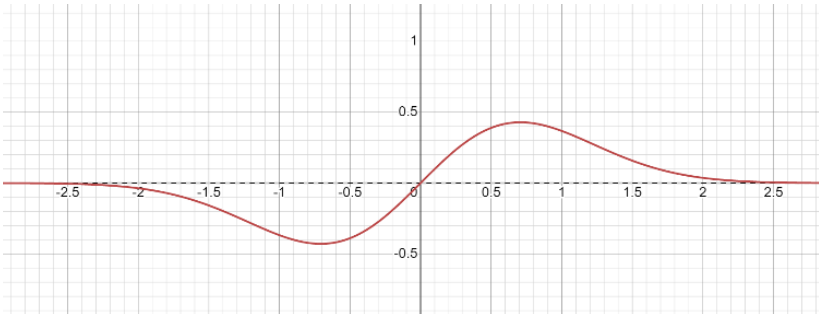
c. Dominio: $D: \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
Intersección con el eje x: $x_1 = 0$
Intersección con el eje y: $y_1 = 0$
Asíntota horizontal: $No\ tiene$
Asíntota vertical: $x = -\sqrt{2},\ x = \sqrt{2}$
Asíntota oblicua: $y = x$
Números críticos: $x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{6},\ x_3 = \sqrt{6}$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = \left(-\infty, -\sqrt{6}\right), I_2 = \left(\sqrt{6}, \infty\right),$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = (-\sqrt{6}, -\sqrt{2}),\ I_2 = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), I_3 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{6}\right)$
Presenta máximos en: $-\sqrt{6}$ y vale $-\frac{3}{2}\sqrt{6}$
Presenta mínimos en: $\sqrt{6}$ y vale $\frac{3}{2}\sqrt{6}$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = \left(-\sqrt{2}, 0\right), I_2 = \left(\sqrt{2}, \infty\right)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right), I_2 = \left(0, \sqrt{2}\right)$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $x = 0$, punto $(0,0)$.



d. Dominio:D: $\{x \in R / -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$
Intersección con el eje x: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = 0$; $x_3 = -\sqrt{2}$
Intersección con el eje y: $y_1 = 0$
Asíntota horizontal: $No\ tiene$
Asíntota vertical: $No\ tiene$
Números críticos: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$; $x_4 = 1$; $x_5 = \sqrt{2}$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = (-1,1)$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = (-\sqrt{2}, -1), I_2 = (1, \sqrt{2})$
Presenta máximos en: $x = 1$ y vale 1
Presenta mínimos en: $x = -1$ y vale -1
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = (-\sqrt{2}, 0)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = (0, \sqrt{2})$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $x = 0$, punto $(0,0)$.

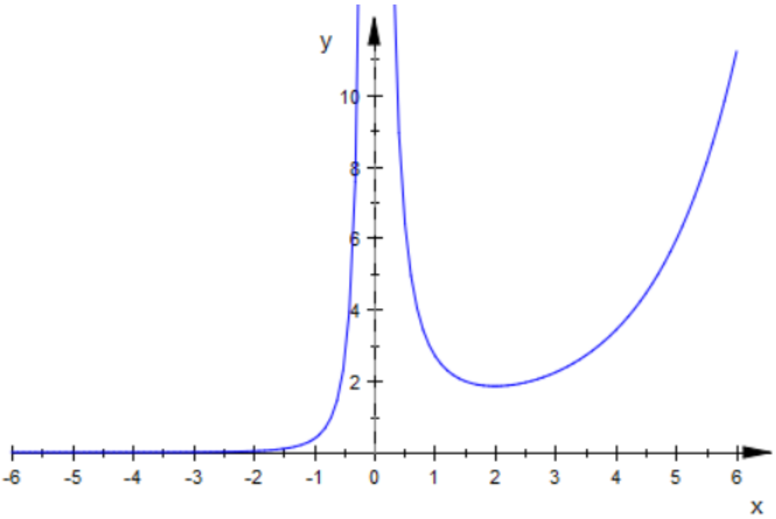


e. $f(x) = x.e^{-x^2}$
Dominio: $D: \mathbb{R}$
Intersección con el eje x: $x = 0$
Intersección con el eje y: $y = 0$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Asíntota vertical: $No\ tiene$
Números críticos: $x_1 = -\sqrt{1/2}, x_2 = \sqrt{1/2}$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = \left(-\sqrt{1/2},\ \sqrt{1/2}\right)$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = \left(-\infty, -\sqrt{1/2}\right), I_2 = \left(\sqrt{1/2}, \infty\right)$
Presenta máximos en: $x_1 = \sqrt{1/2}$
Presenta mínimos en: $x_1 = -\sqrt{1/2}$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = \left(-\sqrt{3/2}, 0\right), I_2 = \left(\sqrt{3/2}, \infty\right)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = \left(-\infty, -\sqrt{3/2}\right), I_2 = \left(0, \sqrt{3/2}\right)$
Valores donde presenta puntos de inflexión: $x_1 = -\sqrt{3/2}\,, x_2 = 0\ ,\ x_3 = \sqrt{3/2}$



f. $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$
Dominio: $D: \mathbb{R} - \{0\}$
Intersección con el eje x: $No\ tiene$
Intersección con el eje y: $No\ tiene$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Asíntota vertical: $x = 0$
Números críticos: $x_1 = 0\,, x_2 = 2$
Intervalos de crecimiento: $I_1 = (-\infty, 0), I_2 = (2, \infty)$
Intervalos de decrecimiento: $I_1 = (0,2)$
Presente máximos en: $No\ tiene$
Presenta mínimos en: $x_1 = 2$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = (-\infty, 0)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = (0, \infty)$

Valores donde presenta puntos de inflexión: $No\ tiene$



g. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$

Dominio: $D: \mathbb{R}^+$

Intersección con el eje x: $x = 1$

Intersección con el eje y: $No\ tiene$

Asíntota horizontal: $y = 0$

Asíntota vertical: $x = 0$

Números críticos: $x_1 = 0\ , x_2 = \sqrt{e}$

Intervalos de crecimiento: $I_1 = \left(0, \sqrt{e}\right)$

Intervalos de decrecimiento: $I_1 = \left(\sqrt{e}, \infty\right)$

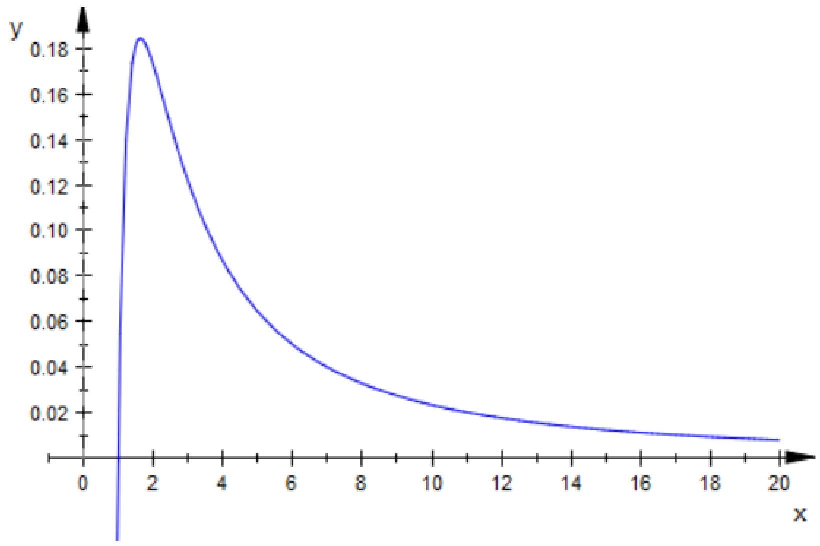
Presente máximos en: $x_1 = \sqrt{e}$

Presenta mínimos en: $No\ tiene$

Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $I_1 = \left(\sqrt[6]{e^5}, \infty\right)$

Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $I_1 = \left(0, \sqrt[6]{e^5}\right)$

Valores donde presenta puntos de inflexión: $x_1 = \sqrt[6]{e^5}$



Ejercicio 6

a. Plantear $0{,}5 = \frac{1}{1+ae^{-kt}}$ ya que pregunta por el tiempo cuando la proporción es la mitad de las personas que lo escuchan. Solución $t = -\frac{ln\left(\frac{1}{a}\right)}{k}$

Ejercicio 7

Planteo: $a - b = 100 \quad a.b\ sea\ mínimo$
Función a minimizar $f(b) = b^2 + 100b$
Resultado $a = 50; b = -50$

Ejercicio 8

Planteo: $a + b = 16 \quad a^2 + b^2 sea\ mínimo$
Función a minimizar $f(b) = (16 - b)^2 + b^2$
Resultado $a = 8; b = 8$

Ejercicio 9

Como la recta está sobre la parábola en el intervalo [1,2], la función a optimizar es:

$$DistanciaVertical(x) = (x + 2) - x^2$$

Esta función no presenta puntos críticos dentro del intervalo [1,2]. Por lo que analizando los extremos del intervalo se obtiene el máximo en $x = 1$.

Ejercicio 10

El máximo se presenta en $I = 2$.

Ejercicio 11

La función a optimizar está representada como: $Área = A(x) = x^2 + \frac{128000}{x}$.
Las dimensiones para que el área sea mínima tienen que ser: $largo = 40\ cm$, $alto = 20cm$

Ejercicio 12

La función a optimizar es el volumen, cuya expresión es: $V(x) = 300x - \frac{3}{4}x^2$.
El mayor volumen posible es: $4000\ cm^3$

Ejercicio 13

La función a optimizar (minimizar en este caso) es el costo, el cual está representado por la función Costo, cuya expresión es: $Costo = f(x) = \frac{20x^3+180}{x}$; valor optimizado Costo= 163,54[$].

Ejercicio 14

La función a optimizar (minimizar en este caso) es la distancia entre el punto y la curva, el cual está representado por la función D, cuya expresión es: $D = f(x) = \sqrt{x^2 + (x-3)^2}$; valor optimizado $D = \sqrt{2{,}75} \approx 1{,}66$.