Cálculo en una Variable

Bioingeniería
Licenciatura en Bioinformática
Ingeniería en Transporte

Tema: Integral indefinida

Integral

- Antiderivada (4.9)
- Integral indefinida (5.4)

Métodos de integración:

- Integración Directa
- Método de Sustitución (5.5)
- Integración por Partes (7.1)
- Uso de tablas.(7.6)
- Descomposición en fracciones simples. (7.4)

- Integral definida. (5.1) - (5.2) - (5.3)
- Aplicaciones de la integral (6.1)- (6.5)

Integral indefinida

Sección 4.9: Antiderivadas

Sección 5.4: Integrales indefinidas

Sección 5.5: Regla de sustitución.

Sección 4.9: Antiderivadas

Antiderivadas

Introducción

Consideremos la siguiente pregunta:

¿Puedo encontrar una función si conozco su derivada?

Antiderivadas

¿Cuál es la derivada $\frac{x^3}{3}$ ***?***

DERIVAR

$$\frac{x^3}{3} \longrightarrow x^2$$

Antiderivadas

$\frac{x^3}{3}$

x^2

INTEGRAR

¿Cuál es la función cuya derivada es x^2 ?

Antiderivadas

¿Cuál es la derivada $\frac{x^3}{3}$ ***?***

DERIVAR

$\frac{x^3}{3}$ → x^2

x^2 ← $\frac{x^3}{3}$

INTEGRAR

¿Cuál es la función cuya derivada es x^2 ***?***

Antiderivadas

Definición

Una función F recibe el nombre de ***antiderivada*** de f sobre un intervalo I si

$$F'(x) = f(x)$$

para todo x en I.

En nuestro ejemplo…

$f(x) = x^2$

Una antiderivada es $F(x) = \frac{x^3}{3}$, pues $F'(x) = x^2$

$G(x) = \frac{x^3}{3} + 2$, pues $G'(x) = x^2$

$H(x) = \frac{x^3}{3} - 7$, pues $G'(x) = x^2$

La antiderivada No es única.

Teorema

Si F es una antiderivada de f sobre un intervalo I, entonces la ***antiderivada más general*** de f sobre I, es

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria

En nuestro ejemplo….

La antiderivada más general de $f(x) = x^2$ es $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$, con c constante.

Teorema

Si F es una antiderivada de f sobre un intervalo I, entonces la ***antiderivada más general*** de f sobre I, es

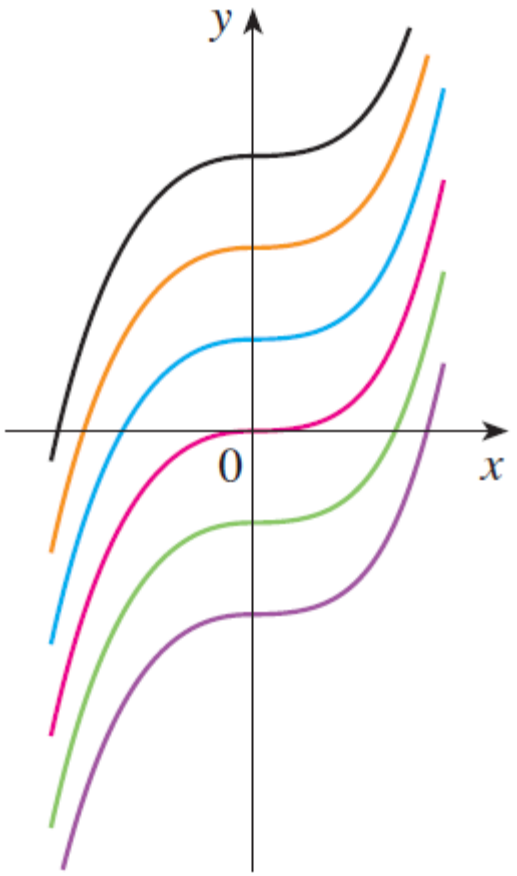
$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria

En nuestro ejemplo, geométricamente

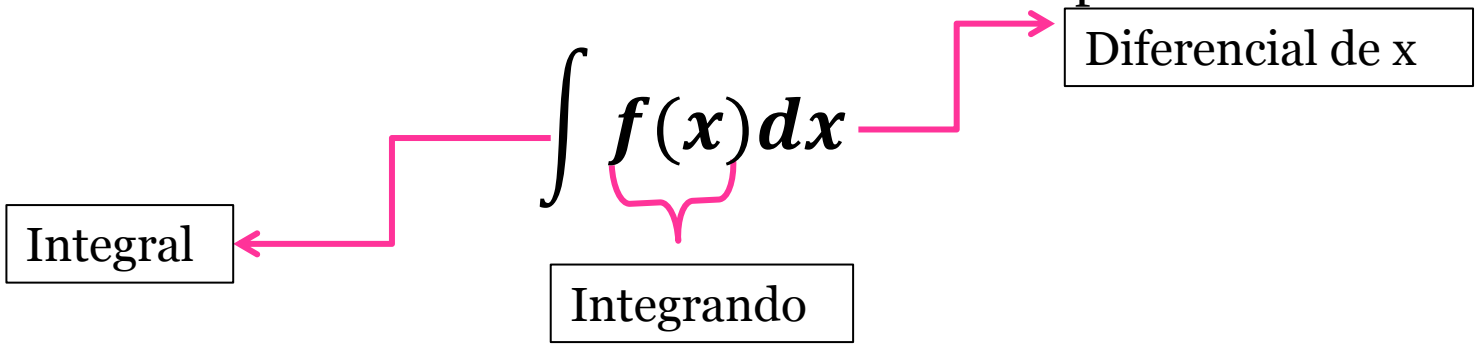
- $y = \frac{x^3}{3} + 3$
- $y = \frac{x^3}{3} + 2$
- $y = \frac{x^3}{3} + 1$
- $y = \frac{x^3}{3}$
- $y = \frac{x^3}{3} - 1$
- $y = \frac{x^3}{3} - 2$

Al tener la misma derivada las gráficas de las funciones tienen el mismo comportamiento.



Integral indefinida

Notación: la antiderivada de f se expresa



Se lee ‘ *la integral de f (x) diferencial x* ’

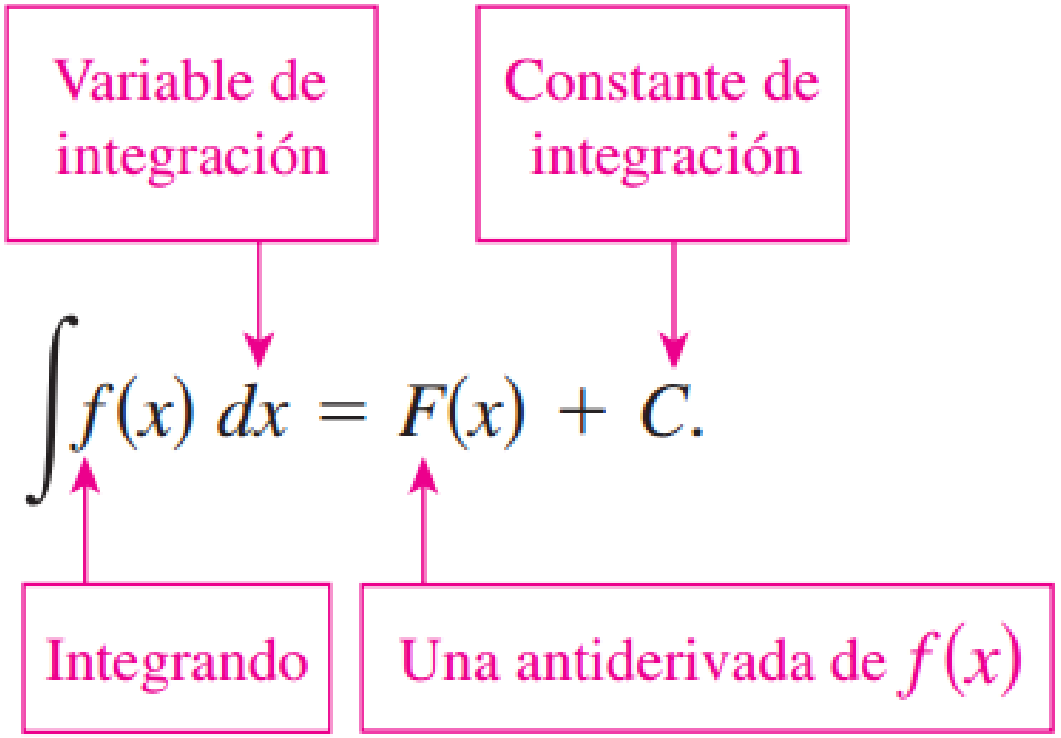
$\int f(x)dx = F(x)$ significa que $F'(x) = f(x)$

Es una integral indefinida de *f*

En nuestro ejemplo:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Notación



En nuestro ejemplo:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Ejemplos

❖ *Reglas de integración*

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

❖ *Tablas de integrales*

Ejemplos:

1) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$

2) $\int x^{20} dx = \frac{x^{21}}{21} + c$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

3) $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$$

4) $\int 7x^5 dx = 7\frac{x^6}{6} + c$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

5) $\int (3x^2 + 9)dx = 3\int x^2 dx + \int 9dx = 3\frac{x^3}{3} + 9x + c$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Tablas de integrales

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

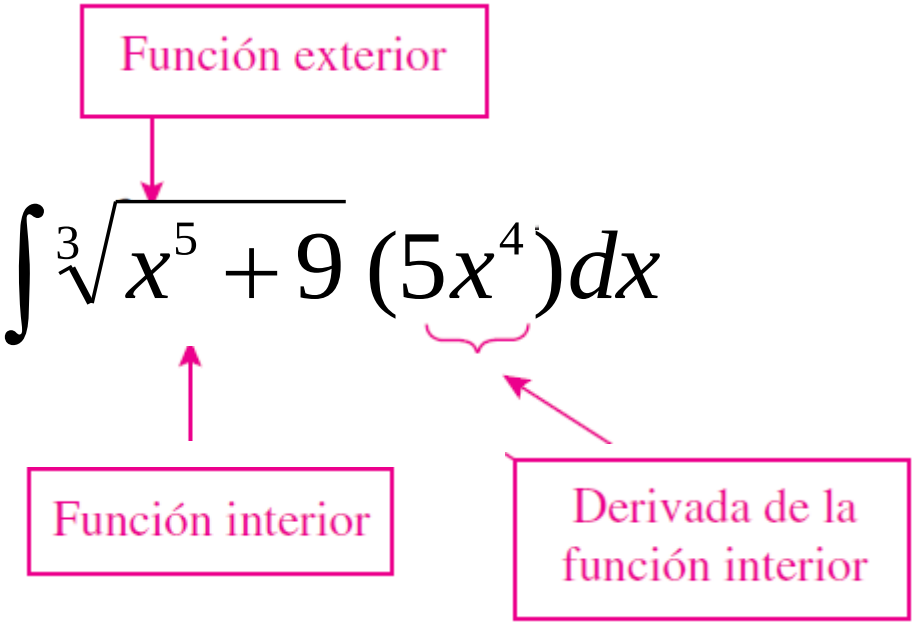
$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

Cambio de variable - Método de Sustitución

Ejemplo

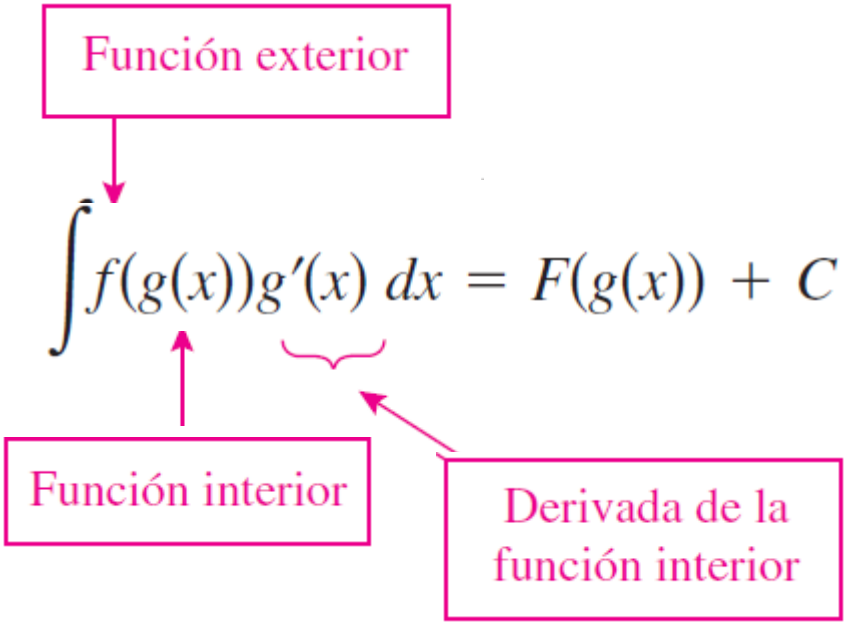
$$\int 5x^4 \sqrt[3]{x^5+9}\,dx$$



Regla de sustitución:

Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo rango es el intervalo I y f es continua sobre I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$



Cambio de variable - Método de Sustitución

Ejemplo

$$\int 5x^4 \sqrt[3]{x^5+9}\,dx$$

Sea $u = x^5 + 9, donde\ du = 5x^4 dx$ sustituyendo en la integral, tenemos

$$\int 5x^4 \sqrt[3]{x^5+9}\,dx = \int \sqrt[3]{u}\,du = \frac{u^{4/3}}{4/3} + c = \frac{3(x^5+9)^{4/3}}{4} + c =$$

u

du

Integración por partes

Considero el producto de dos funciones *u(x).v(x)*

$$D_x\left[u(x)v(x)\right]=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

O bien

$$u(x)v'(x)=D_x\left[u(x)v(x)\right]-v(x)u'(x)$$

Integrando miembro a miembro

$$\int u(x)\,v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx$$

$$dv=v'(x)dx \qquad du=u'(x)dx$$

$$\int u(x)dv=u(x)v(x)-\int v(x)\,du$$

Integración por partes

Si *u y v* son funciones de *x* y tienen derivadas continuas

$$\int u(x)dv = u(x)v(x) - \int v(x)\,du$$

Es decir

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Integración por partes

Dónde se aplica?

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Me pregunto

¿Hay una parte Exponencial?

Ejemplo: $\int 3xe^{x}\,dx$

¿Hay una parte Logarítmica?

Ejemplo: $\int (x^3 - 5x^2 + x)\ln x\,dx$

¿Hay una parte Trigonométrica?

Ejemplo: $\int 6x\cos x\,dx$

Un sola función ?

Ejemplo: $\int \ln x\,dx$

Bibliografía

- STEWART, James, (2012): *"Cálculode una variable-Trascendentes y tempranas"* - 7ma edición - Cengage – Learning – México.

Integral

- Antiderivada.(4.9)
- Integral indefinida (5.4)

  Métodos de integración : Integración Directa
  Método de Sustitución (5.5)
  Integración por Partes (7.1)
  Uso de tablas.
- Integral definida.(5.1 - 5.2 - 5.3)(5.5)
- Aplicaciones de la integral Área entre curvas (6.1)