

Ejercicios Resueltos - Guía Práctica Nro 9: Integrales I

A continuación, se presentan algunos ejercicios resueltos para que puedan tener presente la manera en que esperamos que realicen su producción escrita.

En este caso se presentan la resolución de los ejercicios 10 e), 3 y 8b).

Ejercicio 10 e)

$\int \frac{x^2+1}{2(x-3)(x-2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2} dx$	
$= \frac{1}{2} \left(\int \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \right) dx$	C.A. $\frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$
$= \frac{A}{2} \int \frac{1}{x-3} dx + \frac{B}{2} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{C}{2} \int \frac{1}{(x-2)^2} dx$	$\frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-2)(x-3) + C(x-3)}{(x-3)(x-2)^2}$
$= \frac{A}{2} \ln x-3 - \frac{9}{2} \ln x-2 + \frac{5}{2} \frac{1}{x-2} + C$	$x^2+1 = A(x-2)^2 + B(x-2)(x-3) + C(x-3)$
	Si $x=2$ Si $x=3$ $10 = A$
	$5 = -C$ $C = -5$ Si $x=0$
	$1 = 4 \cdot 10 + 6B + 15$ $1 - 55 = 6B$ $\frac{-54}{6} = B$ $B = -9$

Ejercicio 3

$$3a. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

Para verificar esta igualdad podríamos intentar resolver la integral o (más fácil) derivar la función a la derecha del igual y ver si llegamos a la expresión que se encuentra en el integrando.

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C \right)' &= - \left(\frac{\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2} + 0}{x^2} \right) \\ &= - \frac{\frac{x^2 - \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2} = \frac{x^2 - (1+x^2)^{1/2} \cdot (1+x^2)^{1/2}}{\sqrt{1+x^2} \cdot x^2} \\ &= - \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{1+x^2} \cdot x^2} = \boxed{\frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}} \end{aligned}$$

por lo que se verifica la igualdad

$$3b. \int \cos^2 x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

Para verificar esta igualdad podríamos intentar resolver la integral o (más fácil) derivar la función a la derecha del igual y ver si llegamos a la expresión que se encuentra en el integrando.

Aplicamos dos identidades trigonométricas:

$$* \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$** \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C \right)' &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos(2x) + 0 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos(2x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2 \cos^2(x) = \boxed{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

se verifica la igualdad

Ejercicio 8b)

12

Ejercicio 8b) Encuentre la integral indefinida:

$$\int (x+1)\sqrt{x^2+2x} \, dx \quad (*)$$

Resolución: Aplicamos el método de sustitución p/ reescribir el integrando:

$$\left. \begin{aligned} u &= x^2 + 2x \\ du &= (2x + 2) \, dx \\ du &= 2(x + 1) \, dx \\ \frac{du}{2} &= (x + 1) \, dx \end{aligned} \right\} \underline{\underline{CA}}$$

$$(*) \int \underbrace{(x+1)}_{du/2} \underbrace{\sqrt{x^2+2x}}_u \, dx = \int \sqrt{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{1/2} \, du =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{1}{3} (x^2 + 2x)^{3/2} + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 2x)^3} + C}$$