Coloquio I
Técnicas de Integración: Integración mediante fracciones parciales

Dr. Juan Felipe Restrepo
juan.restrepo@uner.edu.ar

Departamento Académico de Matemática
Cálculo en una Variable

Introducción

Temas de clase:

1. Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales.

Sección 7.4 Pág. 484.

Funciones racionales:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde P y Q son polinomios.

Funciones racionales:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde P y Q son polinomios.

Se clasifican en:

- **Impropias:** el grado de P es mayor o igual que el grado de Q

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5}{x^2 + x + 1}.$$

Funciones racionales:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde P y Q son polinomios.

Se clasifican en:

- **Impropias:** el grado de P es mayor o igual que el grado de Q

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5}{x^2 + x + 1}.$$

- **Propias:** el grado de P es menor que el grado de Q

$$f(x) = \frac{x + 5}{x^2 + x - 2}.$$

Integración mediante fracciones parciales

Integrar cualquier **función racional propia** expresándola como una suma de fracciones simples (**fracciones parciales**).

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

Integración mediante fracciones parciales

Integrar cualquier **función racional propia** expresándola como una suma de fracciones simples (**fracciones parciales**).

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x$$

Integración mediante fracciones parciales

Integrar cualquier **función racional propia** expresándola como una suma de fracciones simples (**fracciones parciales**).

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,\mathsf{d}x = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathsf{d}x$$

$$= \int \frac{2}{x-1}\,\mathsf{d}x - \int \frac{1}{x+2}\,\mathsf{d}x$$

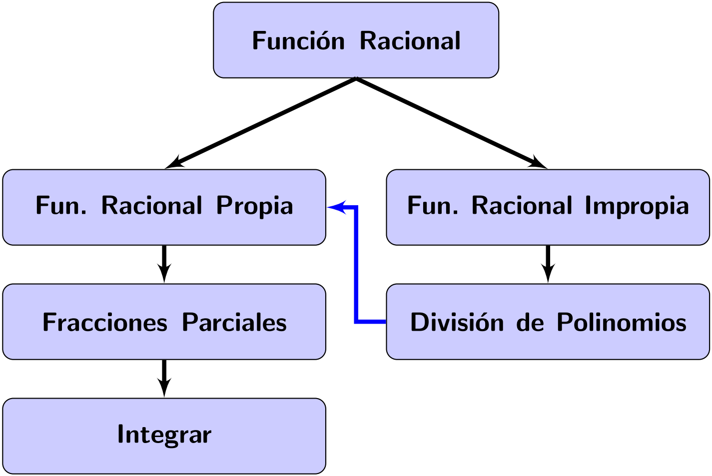
Integración mediante fracciones parciales

Integrar cualquier **función racional propia** expresándola como una suma de fracciones simples (**fracciones parciales**).

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,\mathsf{d}x &= \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)\,\mathsf{d}x \\
&= \int \frac{2}{x-1}\,\mathsf{d}x - \int \frac{1}{x+2}\,\mathsf{d}x \\
&= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C.
\end{aligned}$$

Integración mediante fracciones parciales



Integración Mediante en Fracciones Parciales

Ejemplo:

Resolver

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$$

Integración Mediante en Fracciones Parciales

Factores	Forma	Fracción parcial
Lineales	$ax+b$	$\dfrac{A}{ax+b}$
Lineales repetidos	$(ax+b)^r$	$\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\dfrac{A_r}{(ax+b)^r}$
Cuadráticos irreductible	ax^2+bx+c con $b^2-4ac<0$	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
Cuadráticos irreductible repetidos	$\left(ax^2+bx+c\right)^r$ con $b^2-4ac<0$	$\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\dfrac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\dfrac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$

Integración mediante en fracciones parciales

Sea f una **función racional propia**, entonces:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$$

Integración mediante en fracciones parciales

Sea f una **función racional propia**, entonces:

$$f(x) = \frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{x+5}{(x-1)(x+2)}$$

1. Factorizar el denominador como producto de factores lineales y factores cuadráticos irreducibles.

Integración mediante en fracciones parciales

Sea f una **función racional propia**, entonces:

$$f(x) = \frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

1. Factorizar el denominador como producto de factores lineales y factores cuadráticos irreductibles.
2. Expresar f como la suma de fracciones parciales.

Sea f una **función racional propia**, entonces:

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x+2}$$

1. Factorizar el denominador como producto de factores lineales y factores cuadráticos irreductibles.

2. Expresar f como la suma de fracciones parciales.

3. Encontrar las constantes de las fracciones parciales dándole valores a x.

Integración mediante en fracciones parciales

Sea f una **función racional propia**, entonces:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx = \int \frac{2}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+2}dx$$

$$=2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

1. Factorizar el denominador como producto de factores lineales y factores cuadráticos irreductibles.
2. Expresar f como la suma de fracciones parciales.
3. Encontrar las constantes de las fracciones parciales dándole valores a x.
4. Integrar.

Integración mediante en fracciones parciales

Ejercicio:

Resolver

$$\int \frac{z+4}{z^3+4z^2+4z}\,\mathsf{d}z$$

Integración mediante en fracciones parciales

Factores	Forma	Fracción parcial
Lineales	$ax+b$	$\dfrac{A}{ax+b}$
Lineales repetidos	$(ax+b)^r$	$\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\dfrac{A_r}{(ax+b)^r}$
Cuadráticos irreductible	ax^2+bx+c con $b^2-4ac<0$	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
Cuadráticos irreductible repetidos	$(ax^2+bx+c)^r$ con $b^2-4ac<0$	$\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\dfrac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\dfrac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$

Integración mediante en fracciones parciales

Sea f una **función racional impropia**. Para calcular:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

podemos dividir P entre Q:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C\left(x\right) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$$\begin{array}{r|l} P\left(x\right) & Q\left(x\right) \\ \hline \vdots & C\left(x\right) \\ \hline R\left(x\right) & \end{array}$$

donde C y R son funciones polinomiales y $R(x)/Q(x)$ es una función racional propia.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C\left(x\right) dx + \int \frac{R\left(x\right)}{Q\left(x\right)} dx$$

Integración mediante en fracciones parciales

Ejemplo:

Resolver

$$\int \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}dx.$$

Integración mediante en fracciones parciales

Sea f una **función racional impropia**, entonces:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x^3 - 4x - 10}{x^2 - x - 6}dx$$

Integración mediante en fracciones parciales

Sea f una **función racional impropia**, entonces:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -4x & -10 & x^2 - x - 6 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & +6x & & x+1 \\ \cline{1-3}
 & x^2 & +2x & -10 & \\
 & -x^2 & +x & +6 & \\ \cline{2-4}
 & & 3x & -4 &
\end{array}$$

1. División de polinomios.

Integración mediante en fracciones parciales

Sea f una **función racional impropia**, entonces:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -4x & -10 & x^2 - x - 6 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & +6x & & x+1 \\ \cline{1-3}
 & x^2 & +2x & -10 & \\
 & -x^2 & +x & +6 & \\ \cline{2-4}
 & & 3x & -4 &
\end{array}
$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x-4}{x^2 - x - 6}$$

1. División de polinomios.
2. Expresar $f(x) = P(x)/Q(x)$ como: $C(x) + R(x)/Q(x)$.

Integración mediante en fracciones parciales

Sea f una **función racional impropia**, entonces:

$$\begin{aligned} f(x) =& x + 1 + \frac{3x-4}{x^2-x-6} \\ =& x + 1 + \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} \\ =& x + 1 + \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+2} \end{aligned}$$

1. División de polinomios.
2. Expresar $f(x) = P(x)/Q(x)$ como: $C(x) + R(x)/Q(x)$.
3. Expresar la fracción propia $R(x)/Q(x)$ como suma de fracciones parciales.

Integración mediante en fracciones parciales

Sea f una **función racional impropia**, entonces:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}dx \\ &= \int \left(x+1+\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x+2}\right)dx \\ &= \int x dx + \int 1 dx + \int \frac{1}{x-3}dx + \int \frac{2}{x+2}dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-3| + 2\ln|x+2| + C\end{aligned}$$

1. División de polinomios.
2. Expresar $f(x) = P(x)/Q(x)$ como: $C(x) + R(x)/Q(x)$.
3. Expresar la fracción propia $R(x)/Q(x)$ como suma de fracciones parciales.
4. Integrar.

Referencias

Stewart, J., 2012. Cálculo de varias variables trascendentes tempranas, 7ma edición. Cengage Learning Editores.