UNER

Facultad de Ingeniería

Cálculo en una Variable

Tema: Integral definida

Integral

- Antiderivada.
- Integral indefinida

  Métodos de integración : Integración Directa
  Método de Sustitución
  Integración por Partes
  Uso de tablas.
- Integral definida.
- Aplicaciones de la integral

Integral

- **Antiderivada.**
- **Integral indefinida**

  Métodos de integración : Integración Directa

  Método de Sustitución

  Integración por Partes

  Uso de tablas.
- Integral definida.
- Aplicaciones de la integral

Integral

APLICACIONES DEL CALCULO INTEGRAL

- CIENCIAS DE LA SALUD, BIOLÓGICAS Y AMBIENTALES
- ECONOMÍA Y COMERCIO
- CIENCIAS SOCIALES Y DEL COMPORTAMIENTO
- INGENIERÍA Y FÍSICA
- FINANZAS E INVERSIÓN

Integral

En Geometría

- Cálculo de áreas de regiones planas.
- Obtener la longitud de arco de una curva.
- Obtener volúmenes de sólidos de revolución.

En Física

- Calcular el Trabajo realizado al mover un objeto de un punto a otro.
- Obtener velocidades y aceleraciones móviles.
- Hallar momentos y centros de masa o centroides.

Integral

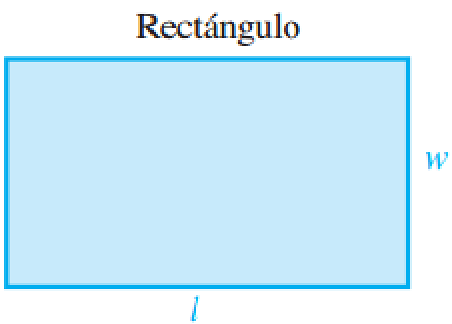
En Biología

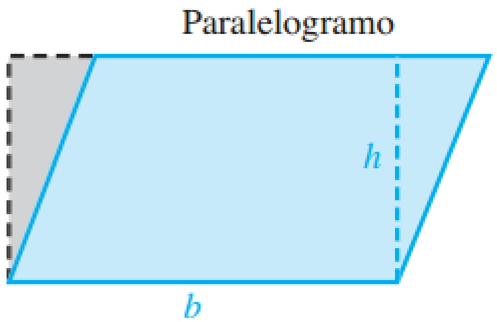
- Cálculo de biomasa.
- Cálculo de la probabilidad de extinción de una especie animal.

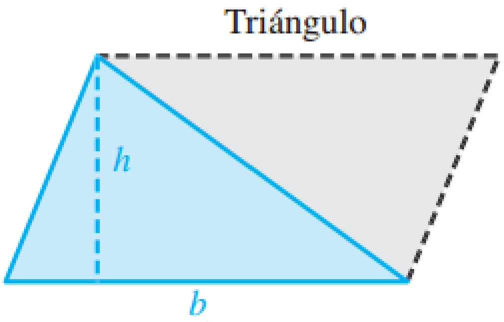
En Medicina

- **Determinar el flujo sanguíneo (volumen de sangre que pasa por una sección transversal por unidad de tiempo) de una persona y su gasto cardíaco (volumen de sangre bombeado por el corazón en función de tiempo).**
- Cálculo de dosis de medicamentos.
- Análisis de señales.
- Construcción de prótesis.

El problema del área



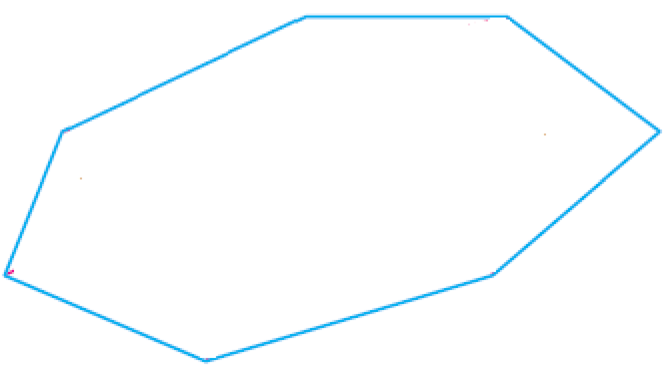


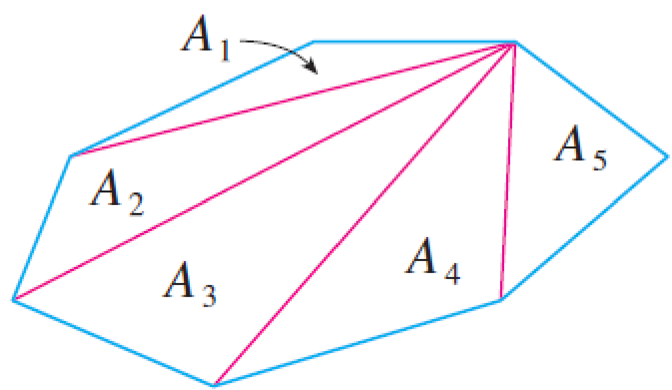


Área: $l.w$

Área: $b.h$

Área:$=\frac{b.h}{2}$



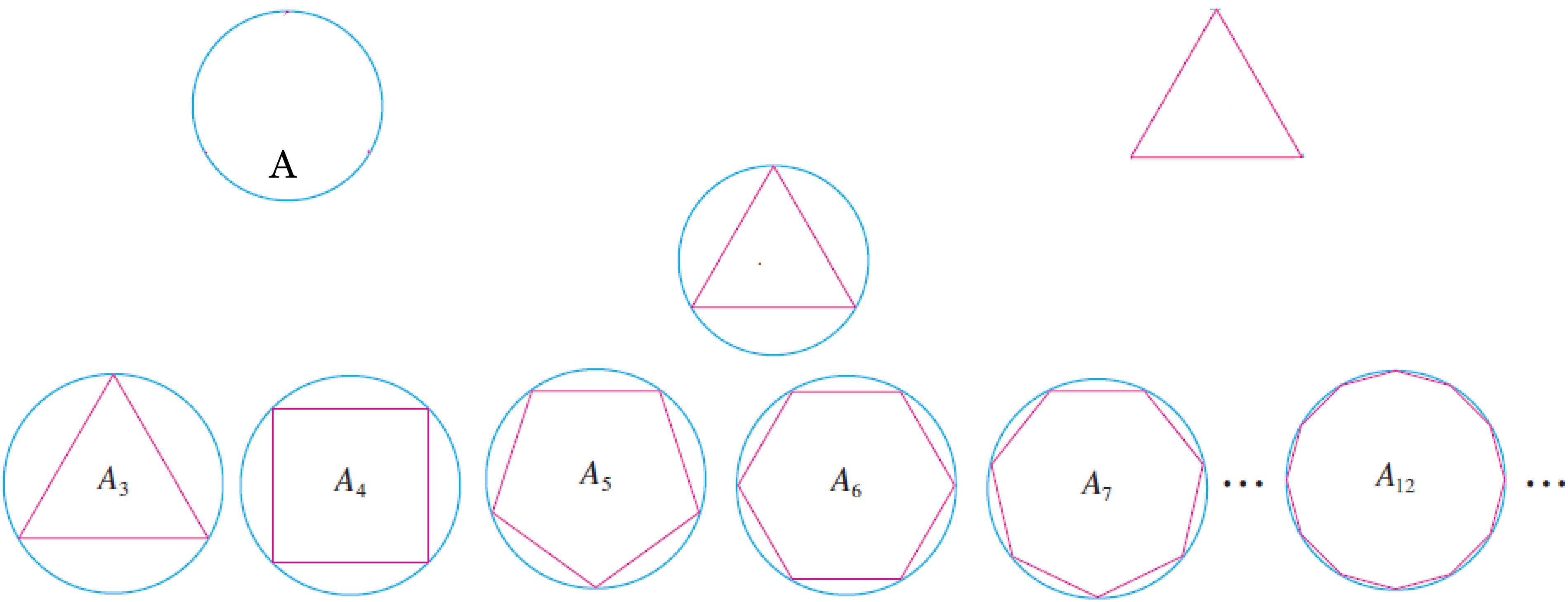


$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

El problema del área

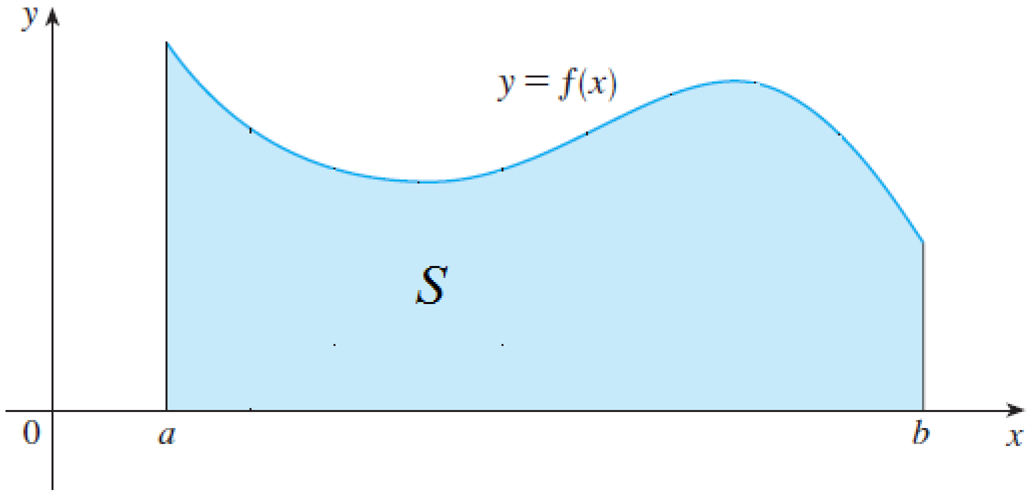
Y las regiones con frontera curva?

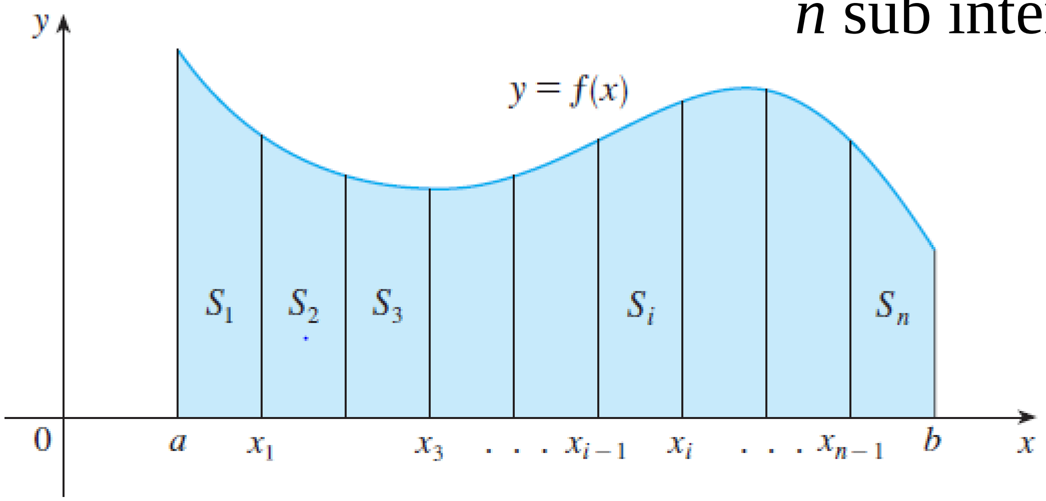
Arquímedes, hace 2000 años, propuso la solución



$$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \pi r^2$$

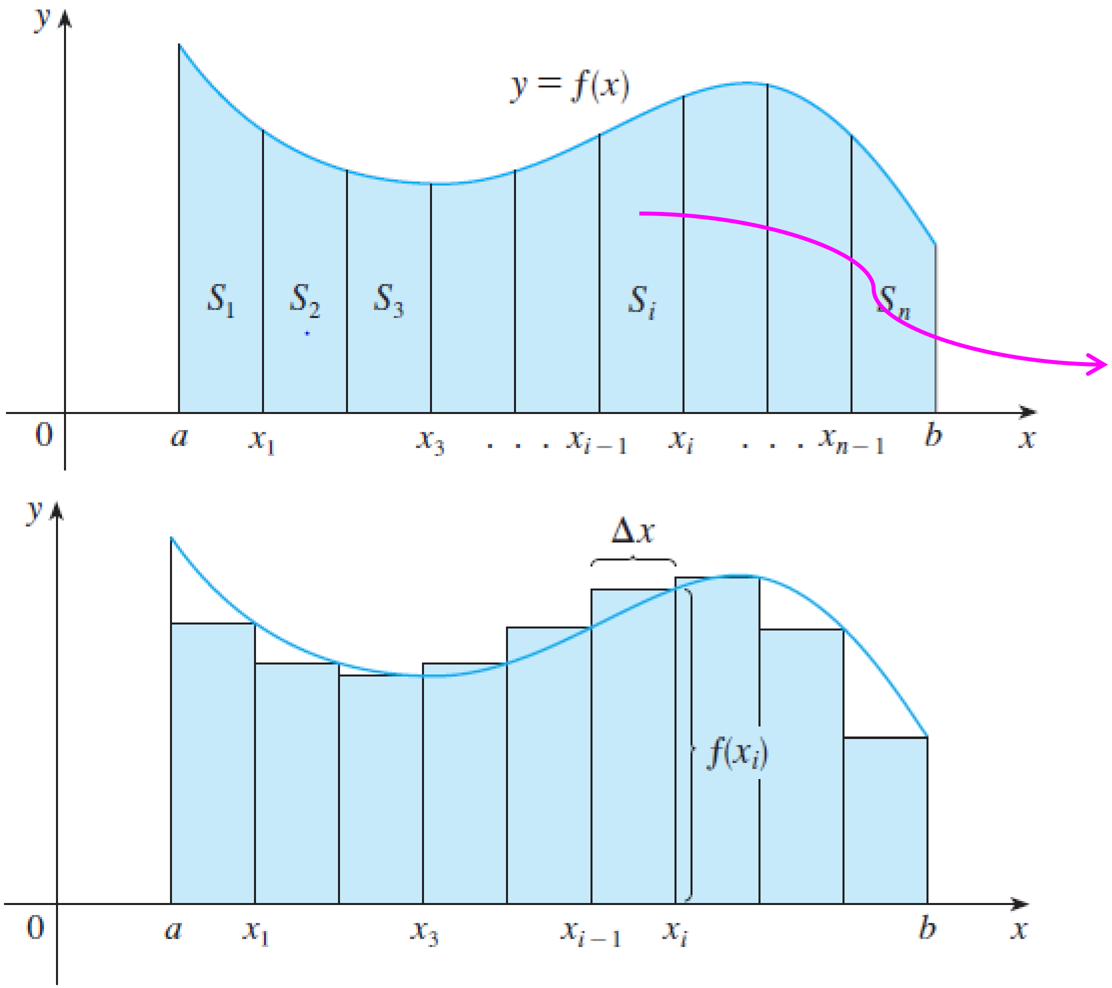
El problema del área

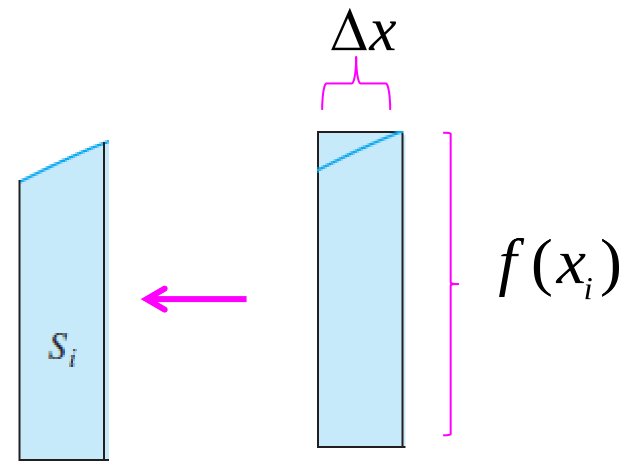




n sub intervalos de longitud

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$



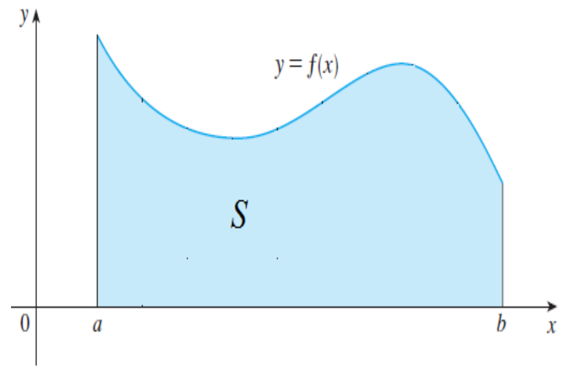


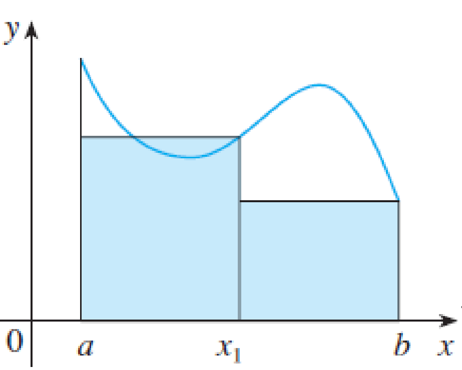
Área del rectángulo

$$f(x_i)\Delta x$$

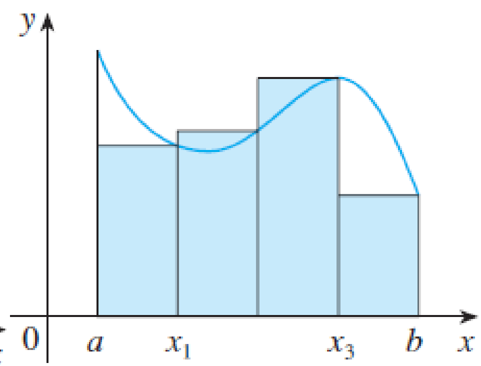
El área S se aproxima con la suma de las áreas de estos rectángulos

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

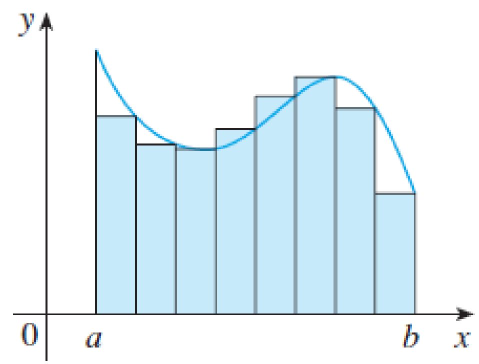




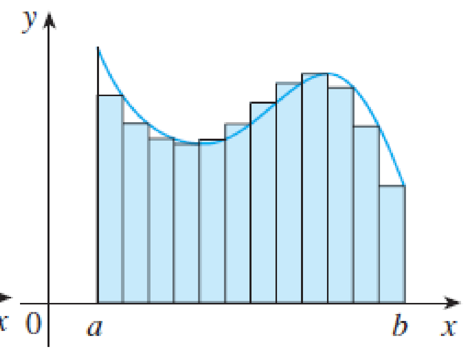
$n = 2$



$n = 4$



$n = 8$

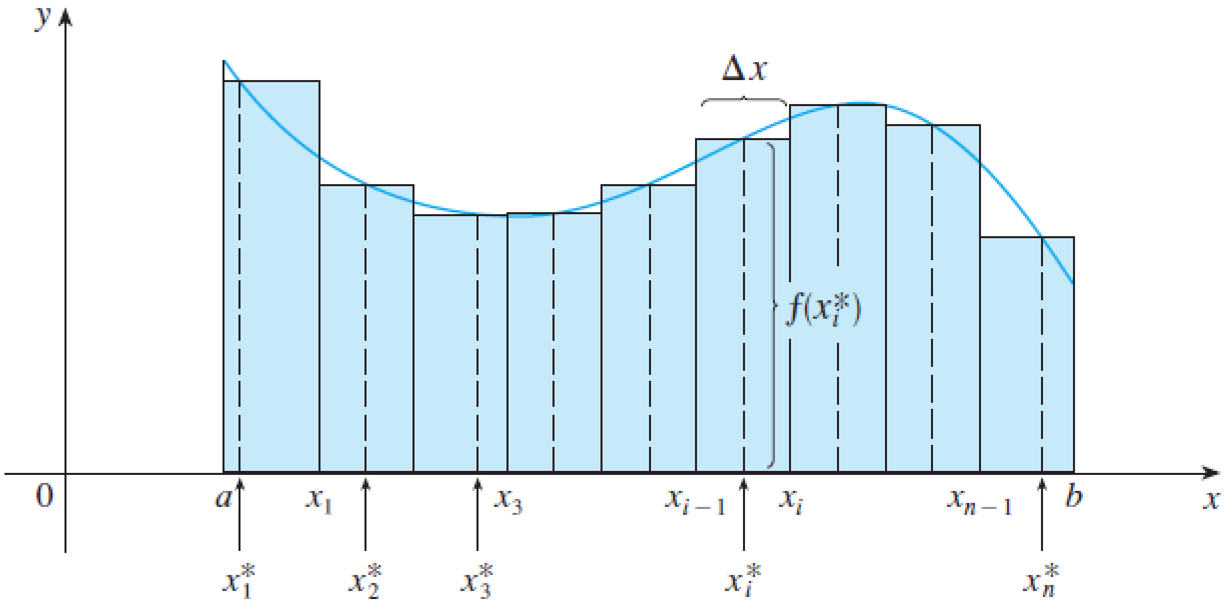


$n = 12$

El **Área A** de la región S que se encuentra bajo la gráfica de la función continua *f* es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación.

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \right]$$

Integral definida



$$A = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x\right]$$

Notación Sigma

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Integral definida

Definición de la integral definida Si f es una función continua definida para $a \leqslant x \leqslant b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Sean $x_0(= a), x_1, x_2, \dots, x_n(= b)$ los puntos extremos de estos subintervalos y sean $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ los **puntos muestra** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de *f*, desde *a* hasta *b***, es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

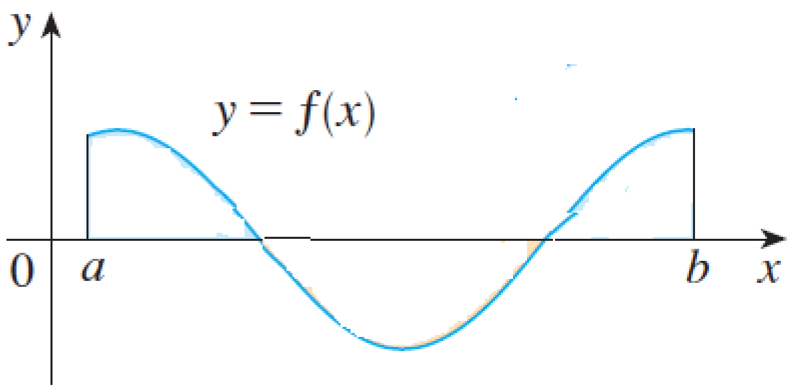
siempre que este límite exista y dé el mismo valor para todos las posibles elecciones de los puntos muestra. Si existe, decimos que f es **integrable** sobre $[a, b]$.

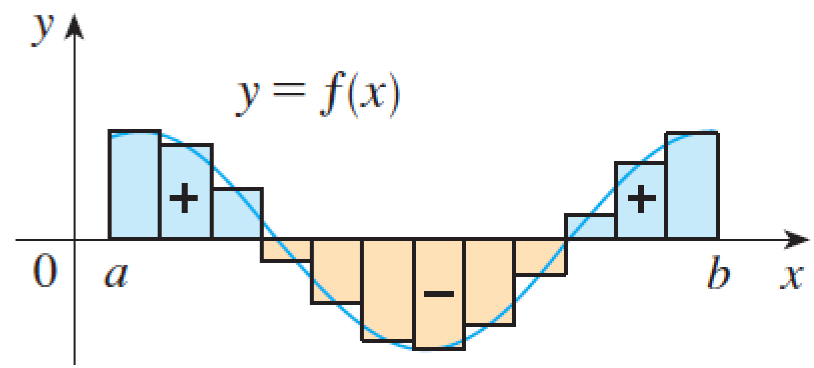
Integral definida

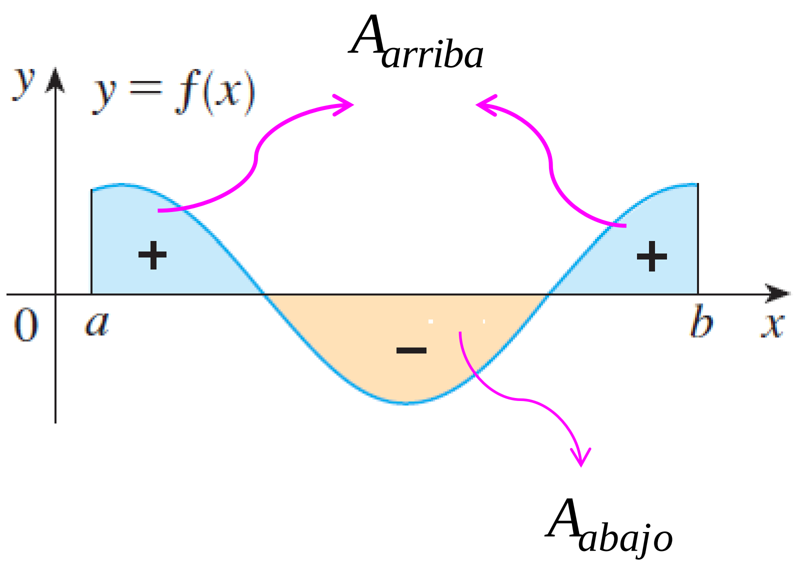
Qué nos dá como resultado la integral definida?

Qué significa el resultado de la integral definida?

Integral definida



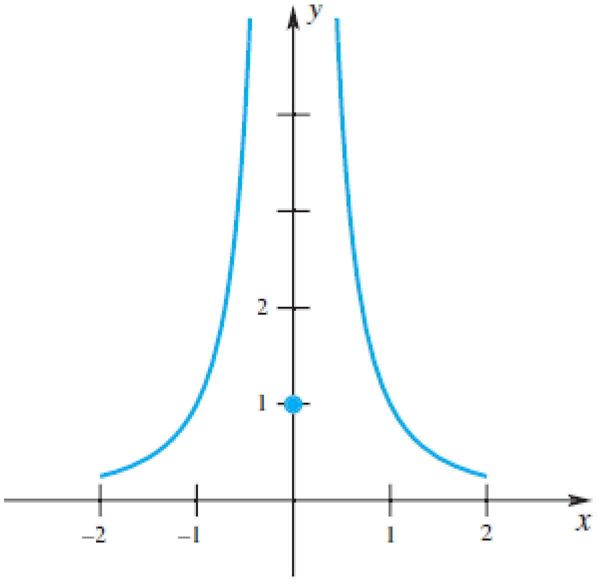




La integral definida puede pensarse como el ***área neta***

$$\int_a^b f(x)dx = A_{arriba} - A_{abajo}$$

¿Cuáles funciones son integrables?



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

***No** es integrable*

$\boxed{3}$ **Teorema** Si f es continua sobre $[a, b]$, o si f tiene sólo un número finito de discontinuidades de salto, entonces f es integrable sobre $[a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Observar

Una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es ***una familia de funciones***

Una integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es un ***número***

Propiedades de la integral definida.

- Si *f* está definida en $x = a$, entonces se define

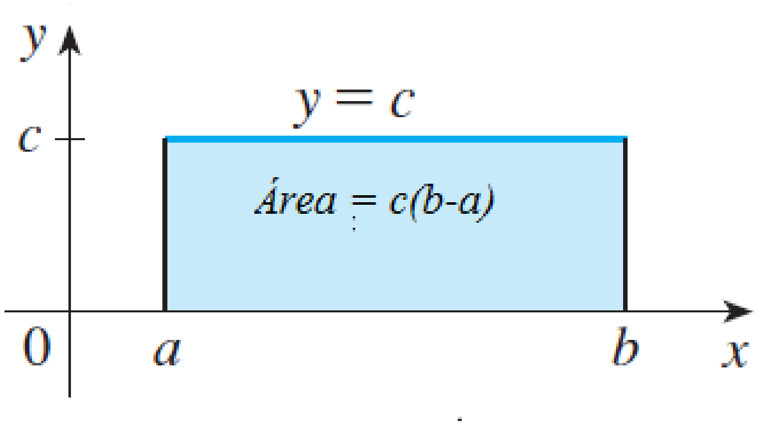
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- Si *f* es integrable en $[a, b]$, entonces se define

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Propiedades de la integral definida.

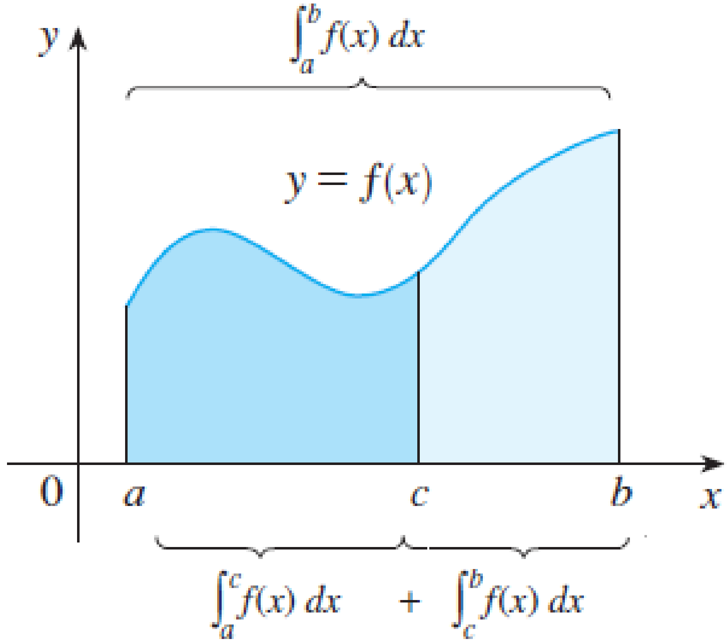
- $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ donde **c** es una constante



- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Geométricamente,
Si consideramos $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$

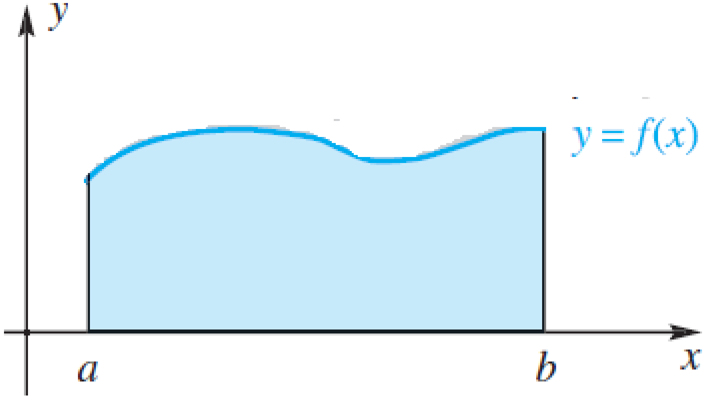


Propiedades de comparación de la integral

- Si $f(x) \geq 0$ *para* $a \leq x \leq b$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Interpretación geométrica,
Si consideramos $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$

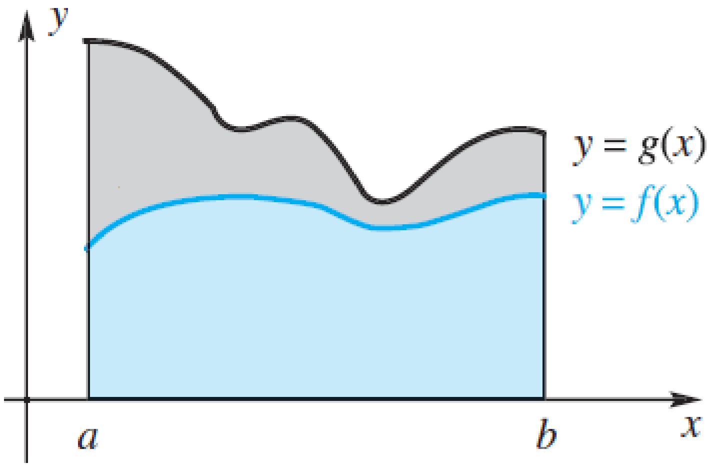


Propiedades de comparación de la integral

- Si $f(x) \leq g(x)$ *para* $a \leq x \leq b$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Interpretación geométrica,
Si consideramos $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$
para todo x en $[a, b]$

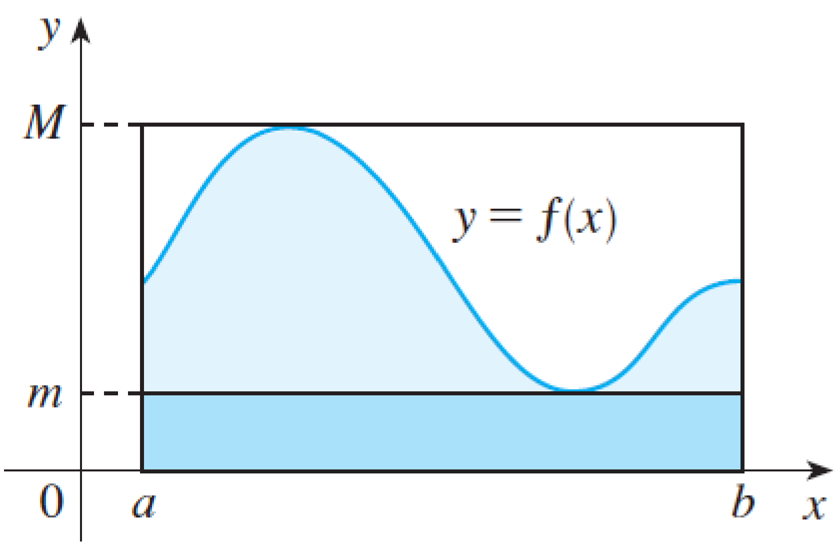


Propiedades de comparación de la integral

- Si $m \le f(x) \le M$ *para* $a \le x \le b$, *entonces*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

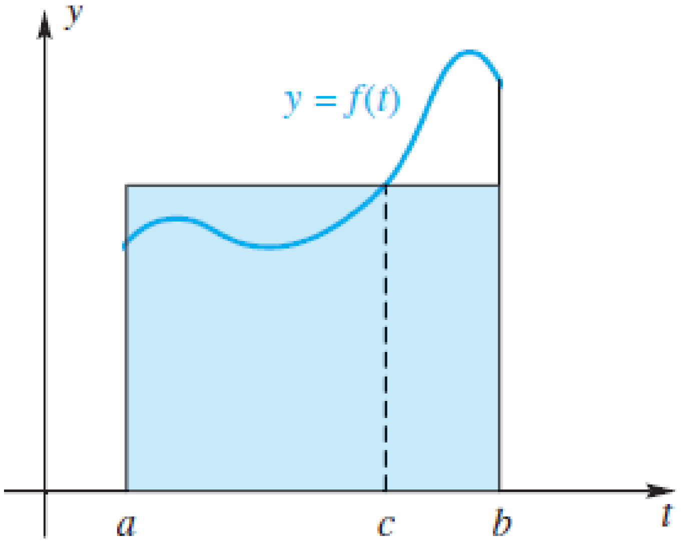
Interpretación geométrica,
Si consideramos $f(x) \ge 0$
para todo x en $[a, b]$



Teorema del valor medio para Integral definida.

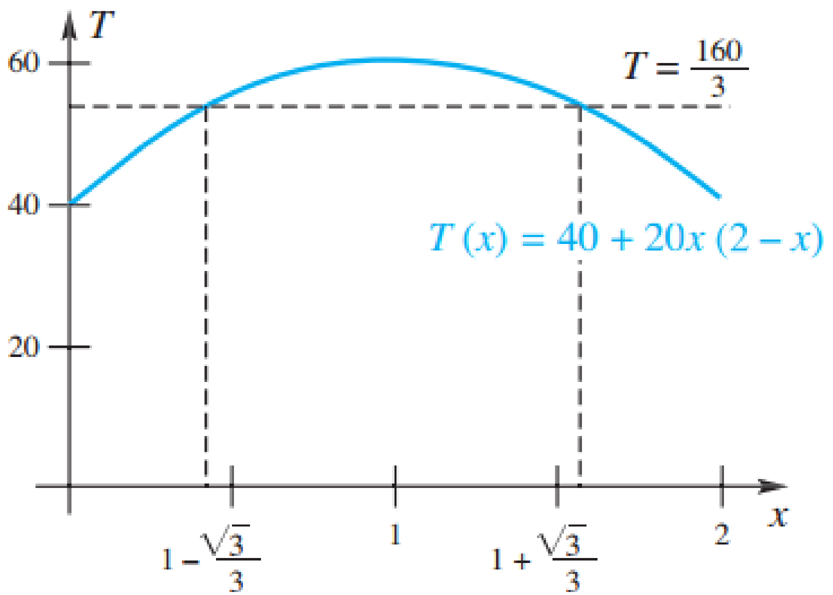
Si *f es integrable* en el intervalo [*a*, *b*], entonces existe un c en el intervalo [*a*, *b*]

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$



Aplicación del valor medio para Integral definida.

Suponga que la temperatura, en grados Fahrenheit, de una barra metálica de longitud de 2 pies, depende de la posición x, de acuerdo con la función $T(x) = 40 + 20x(2 - x)$. Determine la temperatura promedio en la barra. ¿Existe algún punto en donde la temperatura real sea igual a la temperatura promedio?

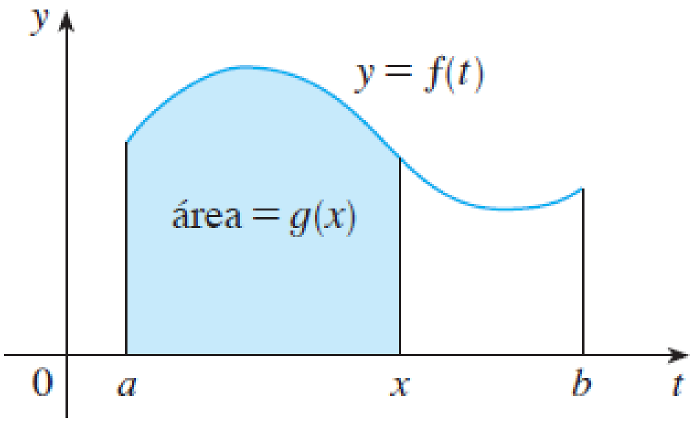


Relación entre la integral y la derivada

Sea la función f continua sobre $[a, b]$ y x que varía entre a y b , consideremos la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Si $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces g(x) puede interpretarse como el área bajo la gráfica de f desde a hasta x.



Teorema fundamental del cálculo Parte 1

Suponga que f es continua sobre $[a, b]$,
entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es continua sobre $[a, b]$ y es derivable sobre (a, b),

y $g'(x) = f(x)$

***Teorema fundamental del cálculo* Parte 2**

Suponga que f es continua sobre $[a, b]$, entonces

- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ donde F es

  cualquier antiderivada de f; es decir $F'(x) = f(x)$

Teorema fundamental del cálculo

Suponga que f es continua sobre $[a, b]$, entonces

- Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ entonces $g'(x) = f(x)$

- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ donde F es cualquier antiderivada de f; es decir $F'(x) = f(x)$

Teorema de Simetría

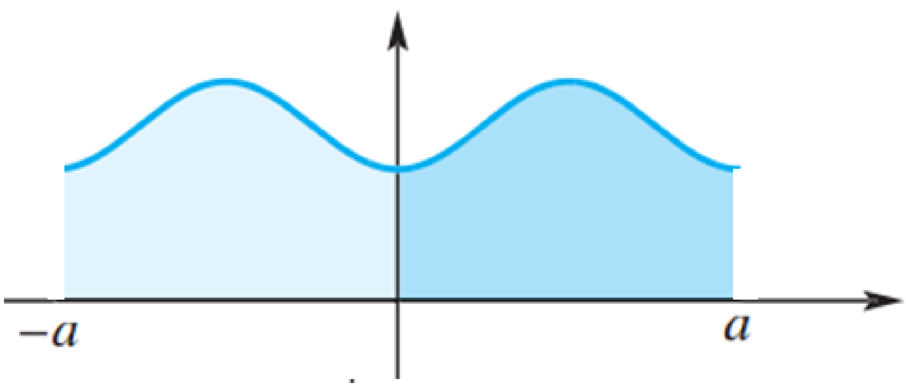
Si f es una función par, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

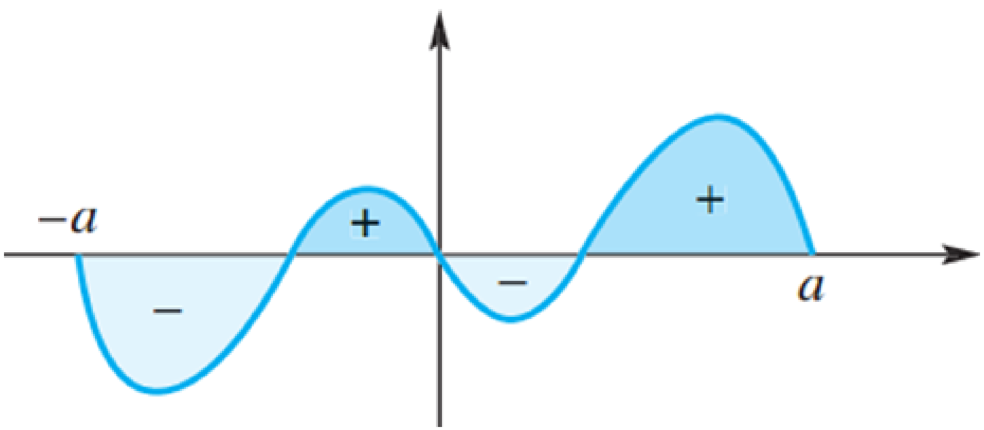
Si f es una función impar, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Interpretación geométrica



Función par



Función impar

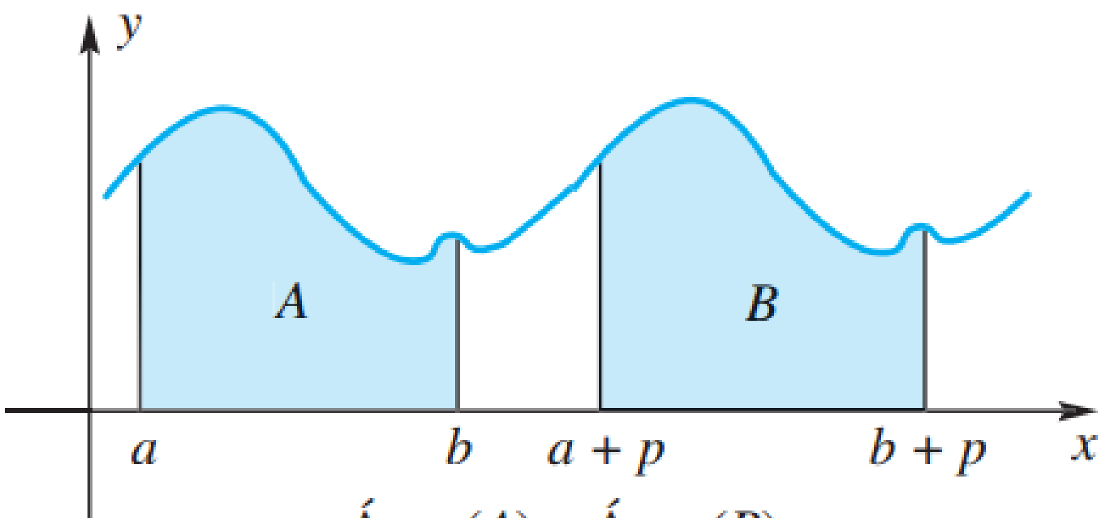
Funciones periódicas

Una función f es *periódica* si existe un número p tal que $f(x+p) = f(x)$, p es el período de la función.

Si f es periódica de período p , *entonces*

$$\int_a^b f(x)d = \int_{a+p}^{b+p} f(x)dx$$

Interpretación geométrica



Área (A) = Área (B)

Ejercicios

Ejercicio 1:

Hallar las siguientes integrales:

a. $\int_{1}^{3} -\mathrm{x}e^{5x^2-7}\mathrm{dx} =$

b. $\int_{-3}^{3} \mathrm{sen(x)dx} =$

c. $\int_{-2}^{2} (\mathrm{x}^4 - 5\mathrm{x}^2)\mathrm{dx} =$

d. $\int_{-2}^{0} \frac{2\mathrm{x}}{\sqrt{5-4\mathrm{x}}}\mathrm{dx} =$

e. $\int_{0}^{\pi/2} \mathrm{x\,senx\,dx}$

Ejemplos

Ejercicio 2 (Estrategia para el cálculo de integrales)

$$\int_{-2\pi}^{3\pi} |\cos(x)| \mathrm{d}x =$$

Ejercicio 3

Calcular el valor promedio de $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo [0, 4]

Ejercicio 4

Indicar, si existe , el valor máximo de la función $g(x) = \int_0^x \ (t^2 - 2)\mathrm{d}t$
.
en [1, 3].

Ejercicio 5

Hallar la derivada de $g(x) = \int^{x^2} t e^t \mathrm{d}t$.

Bibliografía

- STEWART, James, (2012): *“Cálculo de una variable-Trascendentes y tempranas”* - 7ma edición - Cengage – Learning – México.