Resolución - Guía Complementaria III: Integrales

Ejercicio 1

Ejercicio 1

a) $\int \frac{(1-x)^2}{x}\,dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - 2 + x\right)dx$

$= \ln|x| - 2x + \frac{x^2}{2} + C$

b) $\int_{-1}^{1} x^{100} \underset{\downarrow}{=} 2\int_0^1 x^{100}\,dx = 2\cdot \frac{x^{101}}{101}\Big|_0^1 = \frac{2}{101}$

x^{100} función par

c) $\int \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx \underset{\downarrow}{=} \int \frac{e^x}{1-(e^x)^2}\,dx =$

$e^{2x} = (e^x)^2$

$= \int \frac{1}{1-u^2}\,du \underset{\downarrow}{=}$

$u = e^x$
$du = e^x\,dx$

tabla 14

$= \frac{1}{2u} \cdot \ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + C$

$= \frac{1}{2e^x} \cdot \ln\left|\frac{e^x+1}{e^x-1}\right| + C$

d) $\int_{-10}^{10} x^{301}\,dx \underset{\downarrow}{=} 0$

x^{301} función impar

$(-10, 10)$ intervalo simétrico respecto al 0.

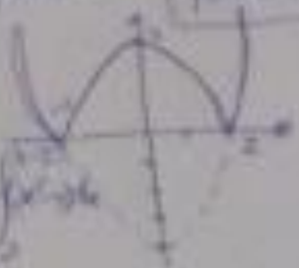
Ejercicio 2

Ejercicio 2

(a) $\int_0^3 |x^2-4|\,dx$

La función $f(x)=|x^2-4|$ se define:

$$f(x)=\begin{cases} -(x^2-4) & -2<x<2 \\ x^2-4 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Entonces,

$$\int_0^3 |x^2-4|\,dx = \int_0^2 -(x^2-4)\,dx + \int_2^3 (x^2-4)\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_2^3$$

$$= -\frac{8}{3}+8+\frac{27}{3}-12-\frac{8}{3}+8 = 13-\frac{16}{3} = \frac{23}{3}$$

b) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^5}\,dx = *$

Calculo la integral definida utilizando Integración por partes

$$\int \frac{\ln x}{x^5}\,dx = \int x^{-5}\ln x\,dx =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=x^{-5}dx \Rightarrow v=\frac{x^{-4}}{4} \end{array}}$$

$$= \frac{x^{-4}}{4}\ln x - \int \frac{x^{-4}}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^{-4}}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^{-5}\,dx = \frac{1}{4}x^{-4}\ln x + \frac{x^{-4}}{4}+C$$

R

$$\int \frac{\ln x}{x^5}\,dx = \frac{1}{4}x^{-4}[\ln x+1]\Big|_1^e = \frac{1}{4}e^{-4}[\ln e+1]-\frac{1}{4}[\ln 1+1]$$

$*$

$$= \frac{1}{4}e^{-4}[2]-\frac{1}{4}$$

Ejercicio 3

Ejercicio 3

a) $\int \frac{5}{2x^3-4x^2+2x}dx \underset{\text{factoreo el denom.}}{=} \int \frac{5}{2x(x-1)^2}dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx \quad (*)$

Aplico descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

Igualo los numeradores

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$\boxed{x=1}$ $\boxed{1=C}$

$\boxed{x=0}$ $\boxed{1=A}$

$\boxed{x=2}$ $1 = 1(2-1)^2 + B(2)(2-1) + 1\cdot 2$

$1 = 1 + 2B + 2$

$\boxed{B=-1}$

$$(*) = \frac{5}{2}\int\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$$

$$= \frac{5}{2}\left[\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{x-1}(-1)\right] + C$$

$$= \frac{5}{2}\left[\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right] + C$$

b) $\int \frac{\theta\cos(\theta^2)}{3}d\theta = \frac{1}{6}\int \cos u\, du = \frac{1}{6}\operatorname{sen}\theta^2 + C$

Sust. $\boxed{\begin{array}{l} u = \theta^2 \\ du = 2\theta d\theta \end{array}} \rightarrow \theta d\theta = \frac{1}{2}du$

c) $\int \frac{5}{\sqrt{9x^2+1}}dx = \int \frac{5}{\sqrt{(3x)^2+1}}dx = \frac{1}{3}\cdot 5\int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du$

$\boxed{\begin{array}{l} u = 3x \\ du = 3dx \end{array}}$

$$\underset{\text{tabla (23)}}{=} \frac{5}{3}\ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) + C$$

$$= \frac{5}{3}\ln\left(3x + \sqrt{9x^2+1}\right)$$

Ejercicio 4

Ejercicio 4

$F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^3}\,dt$ definida para $x \geq 0$

a) $F(1) = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3}\,dt \overset{(*)}{=}$

Sol. $\int \frac{t^2}{1+t^3}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\ln|u| + C$

Sust $u = 1+t^3$, $du = 3t^2\,dt$

$= \frac{1}{3}\ln|1+t^3| + C$ (**)

(*) $\left[\frac{1}{3}\ln|1+t^3|\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln|1+1| - \frac{1}{3}\ln|1|$

$= \frac{1}{3}\ln 2$

b) $F(b) = 1/3$

$\int_0^b \frac{t^2}{1+t^3}\,dt = \frac{1}{3} \underset{\text{por } (**)}{\Longrightarrow} \frac{1}{3}\ln|1+b^3| = \frac{1}{3}$

entonces $\ln|1+b^3| = 1$

$1+b^3 = e$

$b^3 = e-1 \Longrightarrow \boxed{b = \sqrt[3]{e-1}}$

c) Para analizar el crecimiento o decrecimiento de F analicemos el signo de F' para x>…
Teorema Fundamental del cálculo integral part…

$F'(x) = \frac{x^2}{1+x^3} > 0$ para todo $x > 0$

por lo tanto F es creciente en $(0, +\infty)$

Ejercicio 5

Ejercicio 5

Datos: • $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = -2$

• g función par

• $\int_{-1}^{0} g(x)\,dx = 3$ y $\int_{3}^{5} g(x)\,dx = 1$

ⓐ $\int_{-1}^{5} (3f(x) + 2g(x))\,dx = 3\int_{-1}^{5} f(x)\,dx + 2\int_{-1}^{5} g(x)\,dx$

$= 3(5) + 2\left[\int_{-1}^{1} g(x)\,dx + \int_{1}^{5} g(x)\,dx\right]$

$= 15 + 2[6 + 1]$

$= 15 + 2(7) = 29$

$\boxed{\begin{aligned} &g \text{ función par} \\ &\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} g(x)\,dx \\ &= 2\int_{-1}^{0} g(x)\,dx \\ &= 6 \end{aligned}}$

ⓑ f impar $\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$, entonces

$\int_{-1}^{1} [g(x) + f(x)]\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$= 6 + 0 = 6$

Ejercicio 6

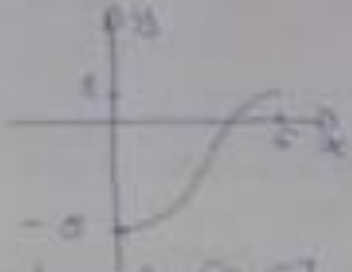
Ejercicio 6

a) Contraejemplo sea

$\int_0^5 f(x)dx \leq 0$ pero

f no es negativa

para todo x en el intervalo $[0,5]$



Conclusión: La afirmación es Falsa

b) Observación importante el extremo inferior de la integral definida es 0,1

$$g(x) = \int_{0,1}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$$

es cóncava hacia arriba para todos $x > 0,1$

Teniendo en cuenta el Teorema Fundamental del cálculo para integral Parte I

$$g'(x) = \frac{e^x}{x}$$

y $$g''(x) = \frac{e^x . x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

y podemos observar que $g''(0,5) < 0$

por lo tanto g'' no es positiva para todo

entonces, $g(x)$ no es cóncava hacia arriba

Conclusión: la afirmación es Falsa

c) Calculamos la integral pedida

$$\int_1^0 [f(x)+x]\,dx = -\int_0^1 [f(x)+x]\,dx$$

$$= -\left[\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 x\,dx\right]$$

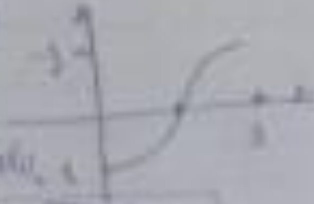
$$= -\left[-\tfrac{7}{2} + \tfrac{x^2}{2}\Big|_0^1\right] = \tfrac{7}{2} - \tfrac{1}{2} = 3$$

Conclusión: la afirmación es verdadera

d) Contraejemplo sea $y = f(x)$

$\int_0^3 f(x)\,dx = 0$ pero f no

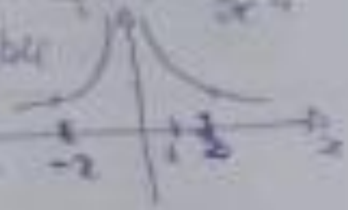
se anula en todo el intervalo



Conclusión: la afirmación es Falsa

e) Contraejemplo sea $f(x) = \frac{1}{x^4}$

Esta función no es integrable en el intervalo $[-2, 1]$ porque presenta una asíntota vertical en $x=0$ (disc de salto infinito)



Conclusión: la afirmación es Falsa

f) f' continua entonces $\int f'(t)\,dt = f(t) + c$

entonces $\int_1^3 f'(t)\,dt = f(t)\Big|_1^3 = f(3) - f(1)$

Conclusión: la afirmación es Verdadera

g) Contraejemplo sea $f(x) = x$

$$\int_a^b x \cdot x\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$x\int_a^b x\,dx = x\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_a^b = x\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)$$

$\neq$

Conclusión: la afirmación es Falsa

Ejercicio 7 y Ejercicio 8

Ejemplo 7

(a) $f(x) = 1-2x^2$; $g(x) = |x|$

$g(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Hallemos el punto de intersección P_2

$1 - 2x^2 = x$

$2x^2 + x - 1 = 0$ las raíces son $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$

Tomaremos sólo $\boxed{x = 1/2}$

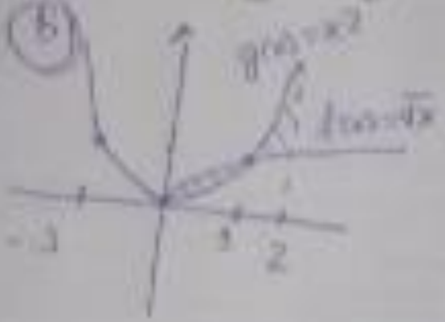
El punto $P_2(1/2, 1/2)$

Como la región es simétrica

$$A(R) = 2\int_0^{1/2} [1 - 2x^2 - x]\,dx = 2\left[-\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= 2\left[-2\frac{(1/2)^3}{3} - \frac{(1/2)^2}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{7}{12}$$

(b)



$$A(R) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]\Bigg|_1^2$$

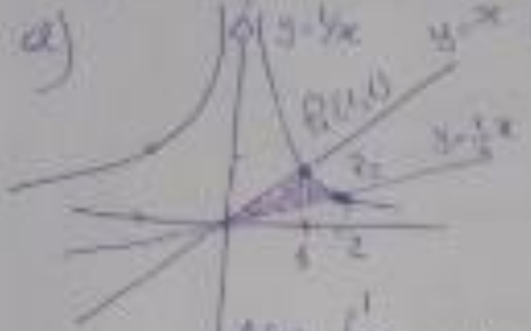
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{2}{3}(2)^{3/2} =$$

$$= 3 - \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

c)

Esto consulto en el ppt de la teoría.

d)



Hallo los puntos de intersección

P_2 intersección entre $y=1/x$ y $y=\frac{1}{4}x$

Igualo:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{4}x$$

$$4=x^2 \quad x_1=2,\; x_2=-2$$

$$\underline{A(R)}=\int_0^1\left(x-\frac{1}{4}x\right)dx+\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}x\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^1+\left[\ln x-\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\ln 2-\frac{1}{2}-\underbrace{\ln(1)}_{=0}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\underline{\ln 2}$$

Ejercicio 6

$$\int_1^2 h''(u)\,du = h'(u)\Big|_1^2 = h'(2)-h'(1) = 5-2 = \underline{3}$$

$\underline{CA}$ $\int h''(u)\,du = h'(u)+C$

Ejercicio 9

Ejercicio 9

Figura (a)

$$A(S) = \int_{-2}^{0} e^{-x}\,dx + \int_{0}^{2} e^{x}\,dx =$$

$$= \frac{e^{-x}}{-1}\Big|_{-2}^{0} + e^{x}\Big|_{0}^{2} = \frac{e^{0}}{-1} - \frac{e^{2}}{-1} + \left[e^{2} - e^{0}\right]$$

$$= -1 + e^{2} + e^{2} - 1 = 2e^{2} - 2$$

Figura (b)

Al observar la gráfica de la región vemos que es simétrica respecto al eje y, por lo tanto podemos plantear

$$A(S) = 2\int_{0}^{2}\left[x - 1 - \left(\frac{3}{4}x^{2} - 2\right)\right]dx = 2\int_{0}^{2}\left[-\frac{3}{4}x^{2} + x + 1\right]dx$$

$$y = |x| - 1 = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ -x-1, & x < 0 \end{cases}$$

$$= 2\left[-\frac{3}{4}\cdot\frac{x^{3}}{3} + \frac{x^{2}}{2} + x\right]_{0}^{2}$$

$$= 2\left[\frac{-(2)^{3}}{4} + \frac{(2)^{2}}{2} + (2) - 0\right]$$

$$= 2\left[-\cancel{2} + \cancel{2} + 2\right] = 4$$

Figura (c)

Observamos que la región está limitada por la recta $y = 3$, la recta $y = -x + 1$, la recta $x = 2$ y la gráfica de $y = \ln x$

$$A(S) = \int_{-2}^{1}\left[3 - (-x+1)\right]dx + \int_{1}^{2}\left[3 - \ln x\right]dx$$

$$= \left[2x + \frac{x^{2}}{2}\right]\Big|_{-2}^{1} + \left[3x - (x\ln x - x)\right]\Big|_{1}^{2} = \frac{17}{2} - 2\ln 2$$