Facultad de Ingeniería

Cálculo en una Variable

Bioingeniería
Licenciatura en Bioinformática
Ingeniería en Transporte

Tema: Integral Definida

Integral

- Antiderivada (4.9)
- Integral indefinida (5.4)

Métodos de integración:

- Integración Directa
- Método de Sustitución (5.5)
- Integración por Partes (7.1)
- Uso de tablas.(7.6)
- Descomposición en fracciones simples. (7.4)

- Integral definida. (5.1) - (5.2) - (5.3)
- Aplicaciones de la integral (6.1)- (6.5)

Integral

- Antiderivada (4.9)
- Integral indefinida (5.4)

Métodos de integración:

- Integración Directa
- Método de Sustitución (5.5)
- Integración por Partes (7.1)
- Uso de tablas.(7.6)
- Descomposición en fracciones simples. (7.4)

- Integral definida. (5.1) - (5.2) - (5.3)
- Aplicaciones de la integral (6.1)- (6.5)

Integral

Aplicaciones del Cálculo Integral

- Ingeniería y Física
- Ciencias de la Salud, Biológicas y Ambientales
- Economía y Comercio
- Ciencias Sociales y del Comportamiento
- Finanzas e inversión

Integral

En Geometría

- Cálculo de áreas de regiones planas.
- Obtener la longitud de arco de una curva.
- Obtener volúmenes de sólidos de revolución.

En Física

- Calcular el Trabajo realizado al mover un objeto de un punto a otro.
- Obtener velocidades y aceleraciones móviles.
- Hallar momentos y centros de masa o centroides.

Integral

En Biología

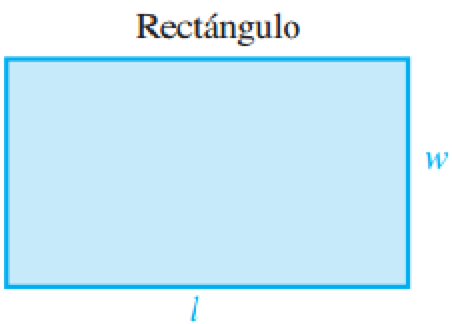
- Cálculo de biomasa.
- Cálculo de la probabilidad de extinción de una especie animal.

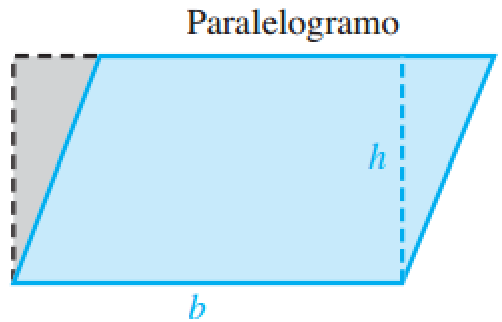
En Medicina

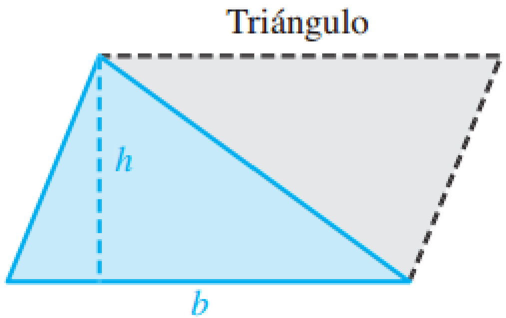
- **Determinar el flujo sanguíneo (volumen de sangre que pasa por una sección transversal por unidad de tiempo) de una persona y su gasto cardíaco (volumen de sangre bombeado por el corazón en función de tiempo).**
- Cálculo de dosis de medicamentos.
- Análisis de señales.
- Construcción de prótesis.

Sección 5.1: Areas y Distancias

El problema del área



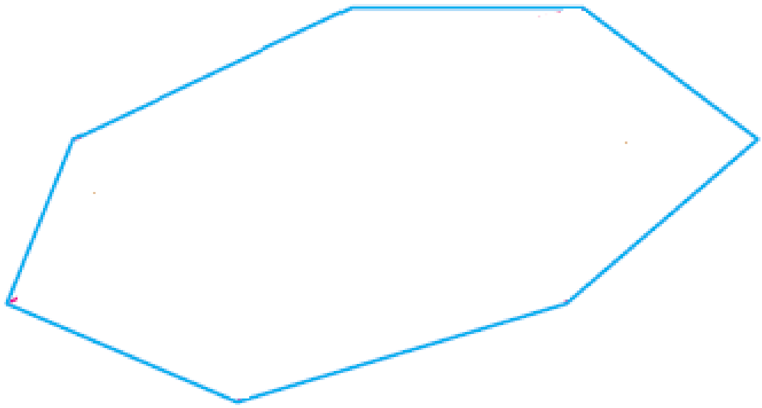


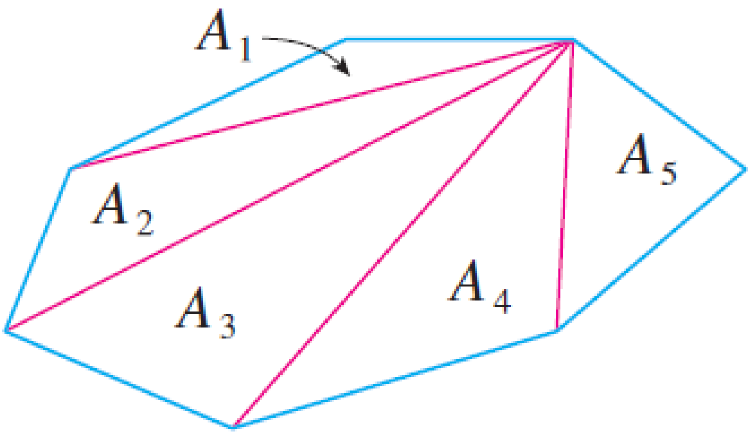


Área: *l.w*

Área: *b.h*

Área:$= \frac{b.h}{2}$



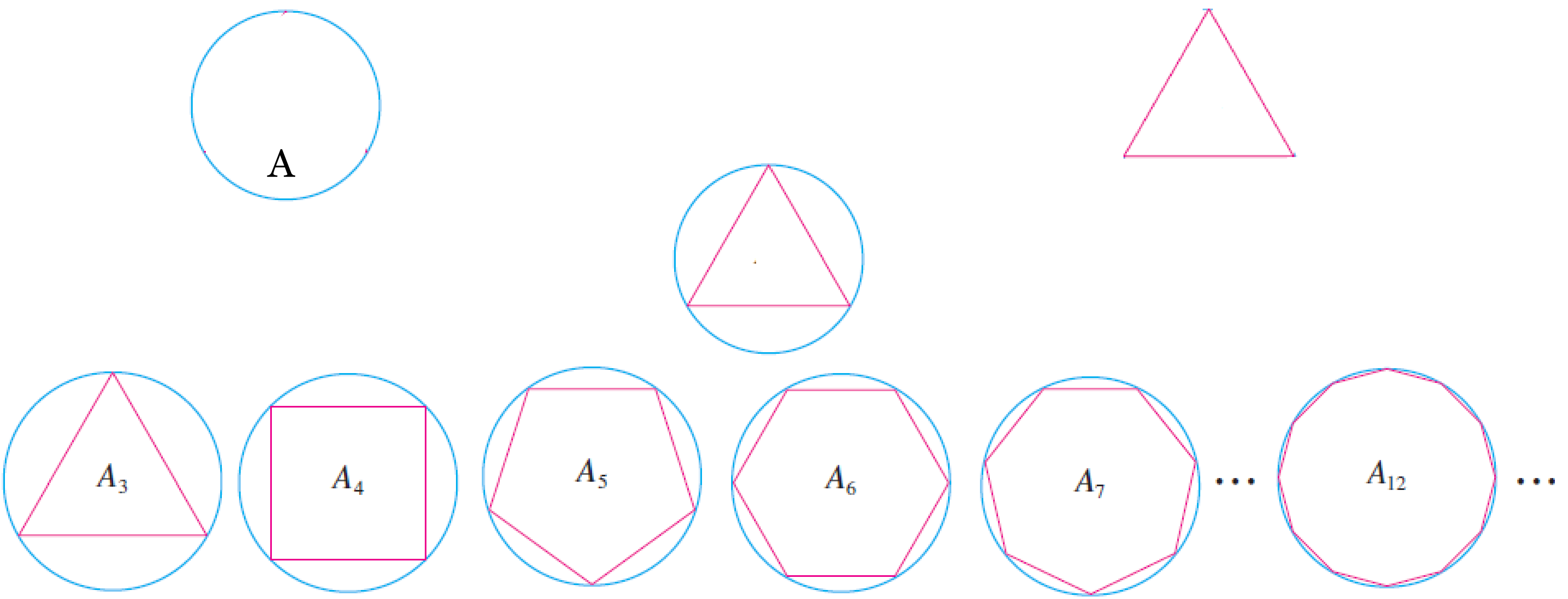


$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

El problema del área

Y las regiones con frontera curva?

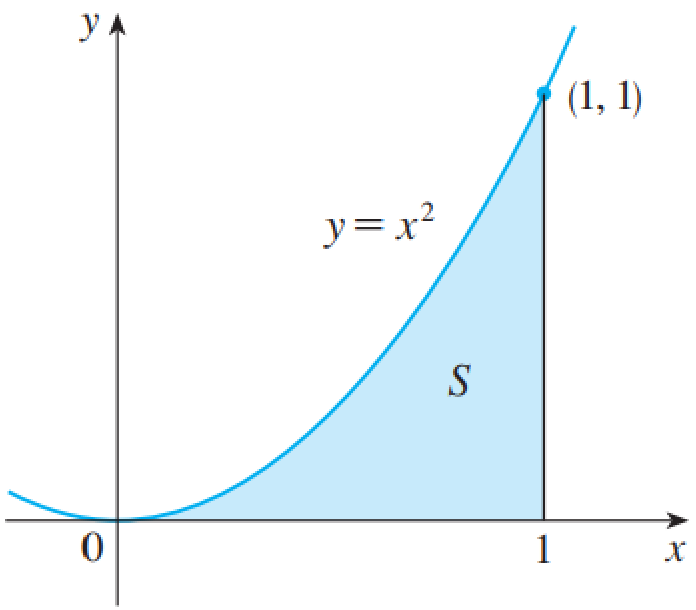
Arquímedes, hace 2000 años, propuso la solución



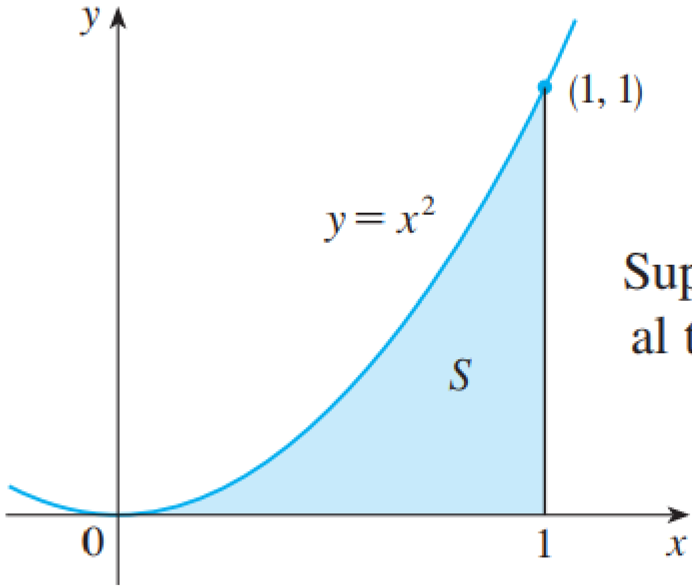
$$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \pi r^2$$

El problema del área

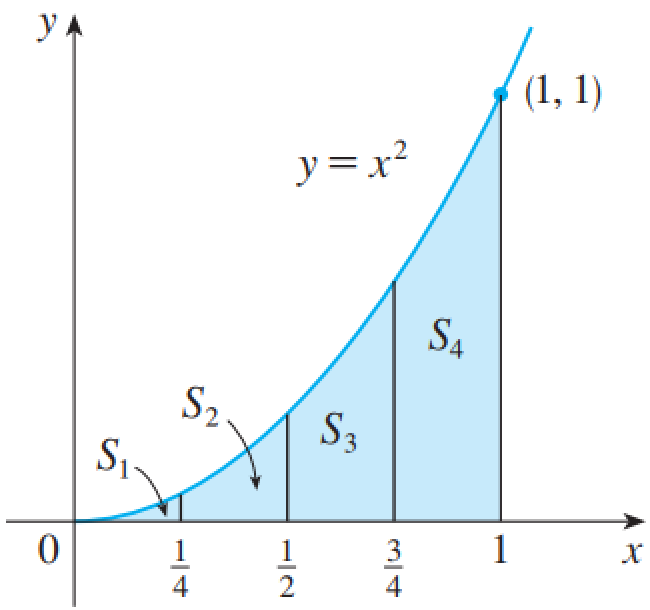
V **EJEMPLO 1** Utilice rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$, desde 0 hasta 1 (la región parabólica S se ilustra en la figura 3).

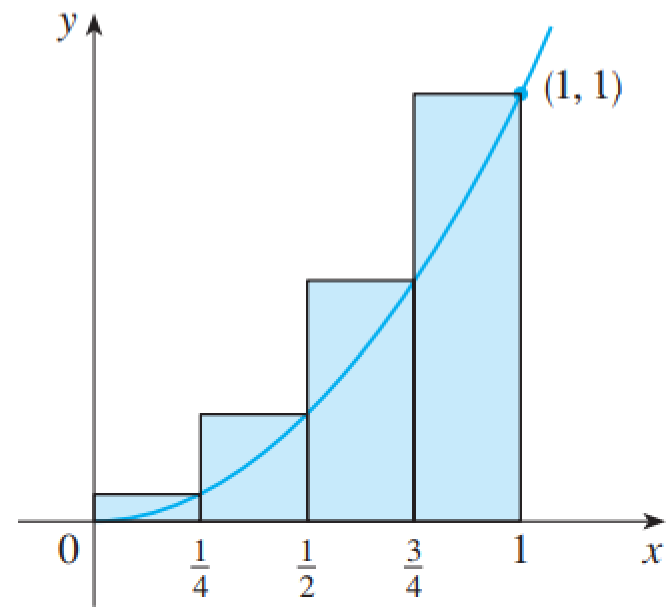


El problema del área



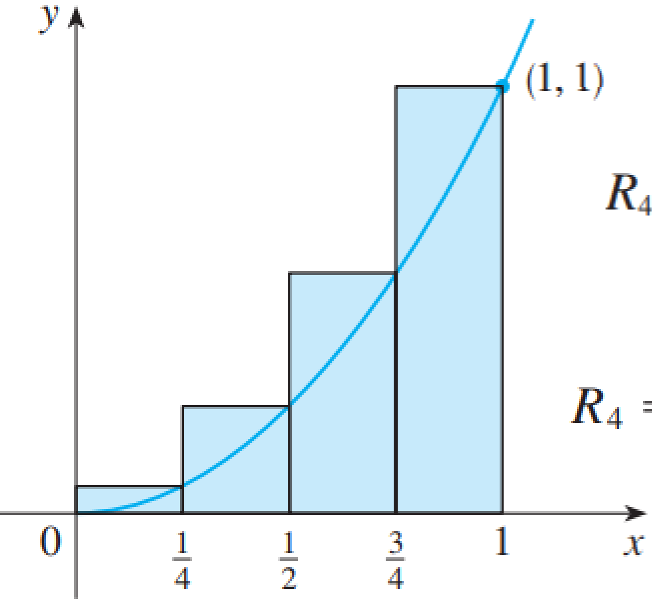
Suponga que dividimos S en cuatro franjas, S_1, S_2, S_3 y S_4, al trazar las rectas converticales $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{4}$





Cada rectángulo tiene un ancho de $\frac{1}{4}$, y las alturas son $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ y 1^2

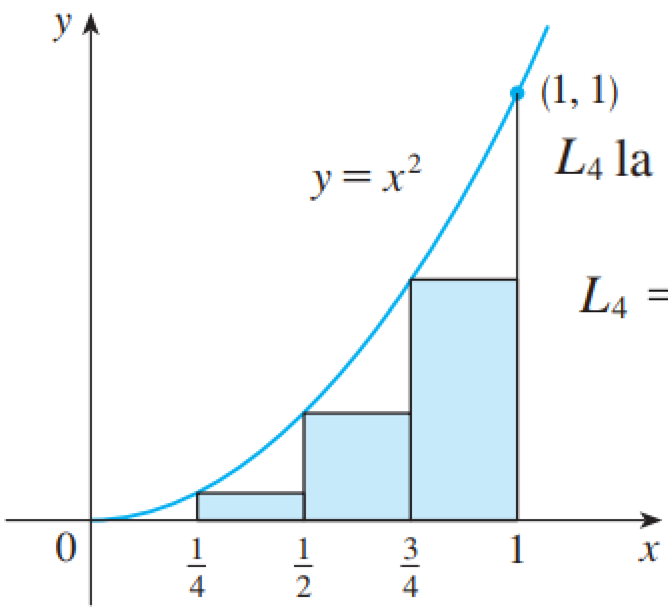
El problema del área



R_4 la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación

$$R_4 = \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot 1^2 = \tfrac{15}{32} = 0.46875$$

$$A < 0.46875$$



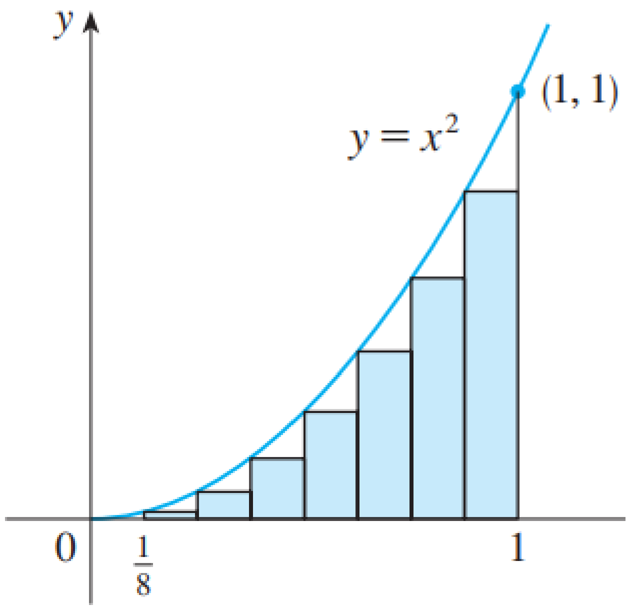
L_4 la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación.

$$L_4 = \tfrac{1}{4} \cdot 0^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{7}{32} = 0.21875$$

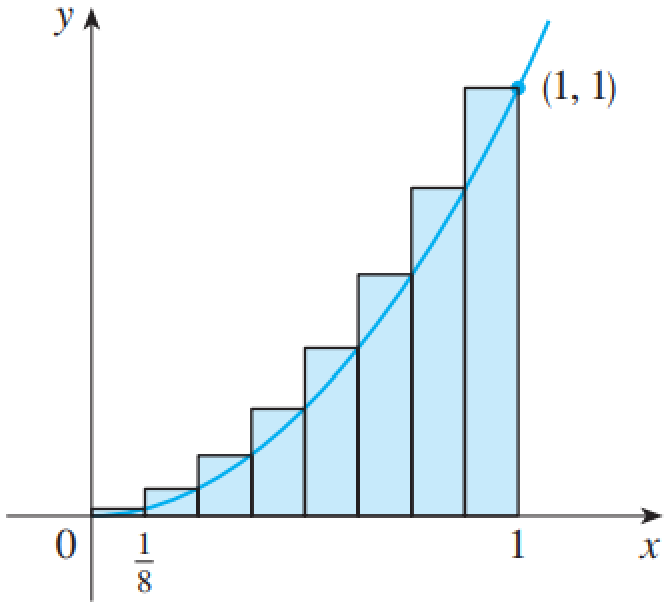
$$0.21875 < A < 0.46875$$

El problema del área

dividimos la región S en ocho franjas de anchos iguales



a) Usando los puntos extremos a la izquierda



b) Usando los puntos extremos a la derecha

L_8, suma de las áreas de los rectángulos más pequeños

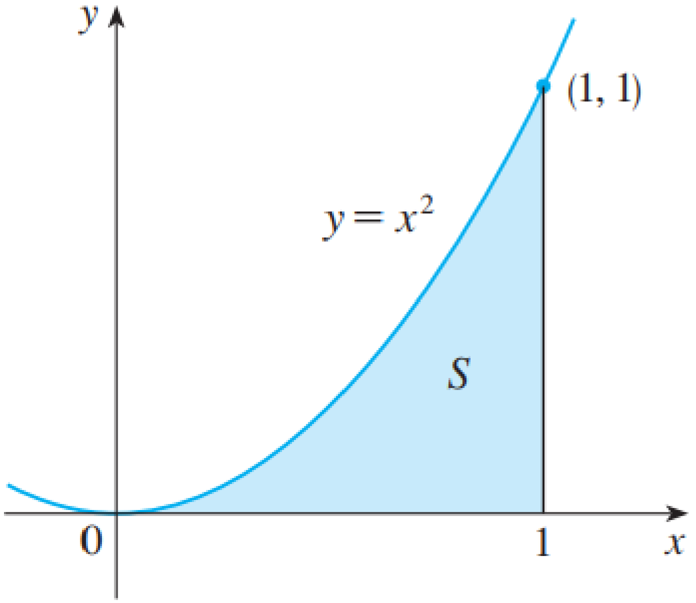
R_8 suma de las áreas de los rectángulos más grandes

$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

El problema del área

En la tabla se muestran los resultados de cálculos semejantes usando n rectángulos cuyas alturas se encontraron con los puntos extremos de la izquierda (L_n) o con los puntos extremos de la derecha (R_n)

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

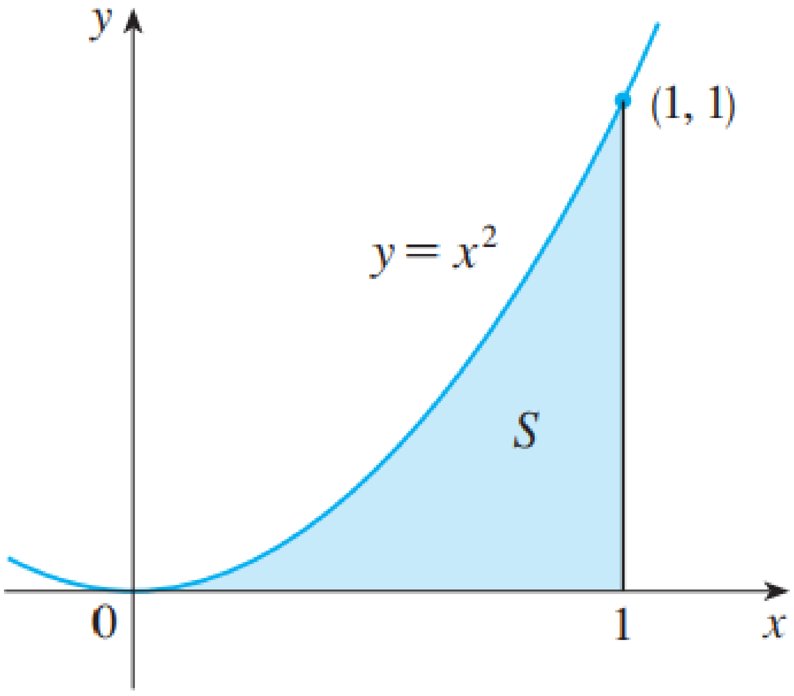


$$\boxed{0.3328335 < A < 0.3338335.}$$

Una buena estimación se obtiene promediando estos números: $A \approx 0.3333335$.

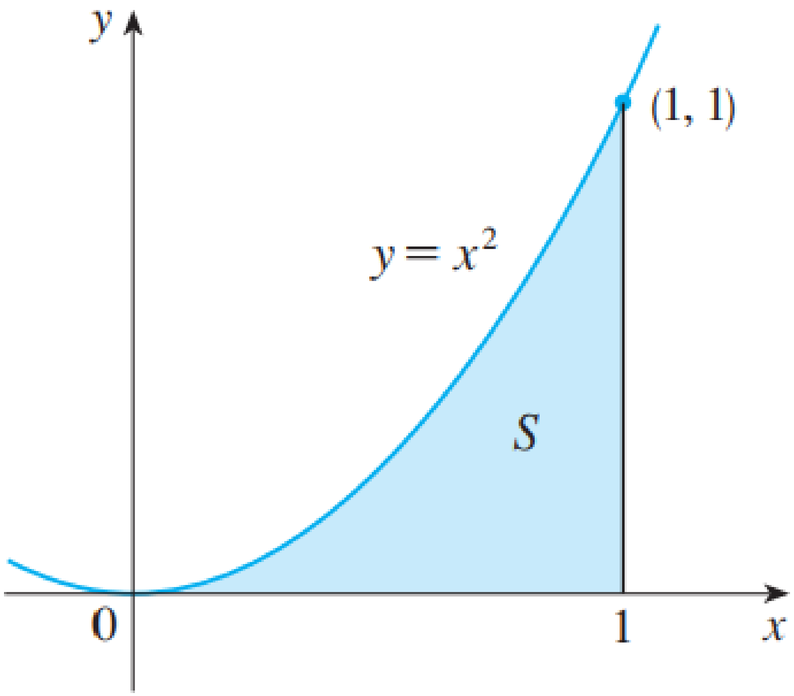
El problema del área

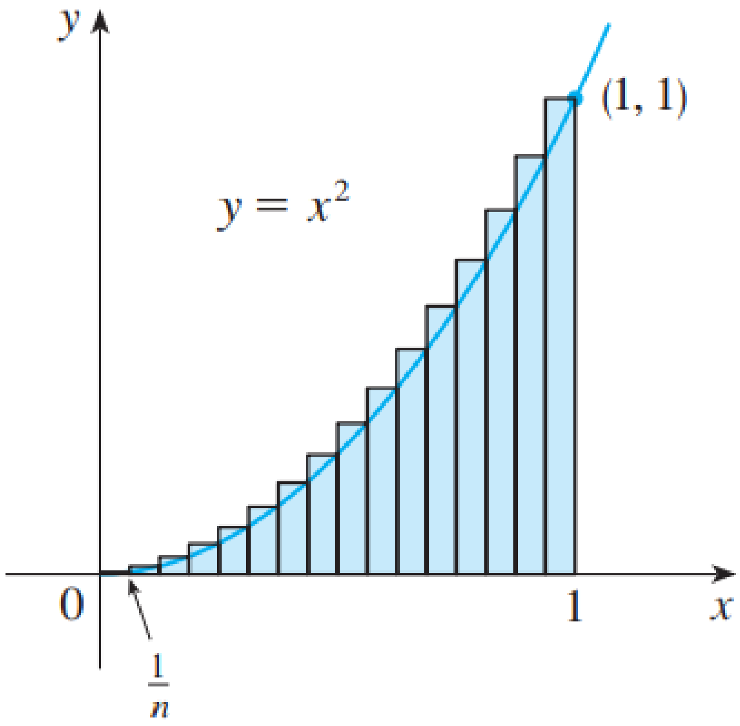
Podemos obtener el valor exacto del Área de S?



El problema del área

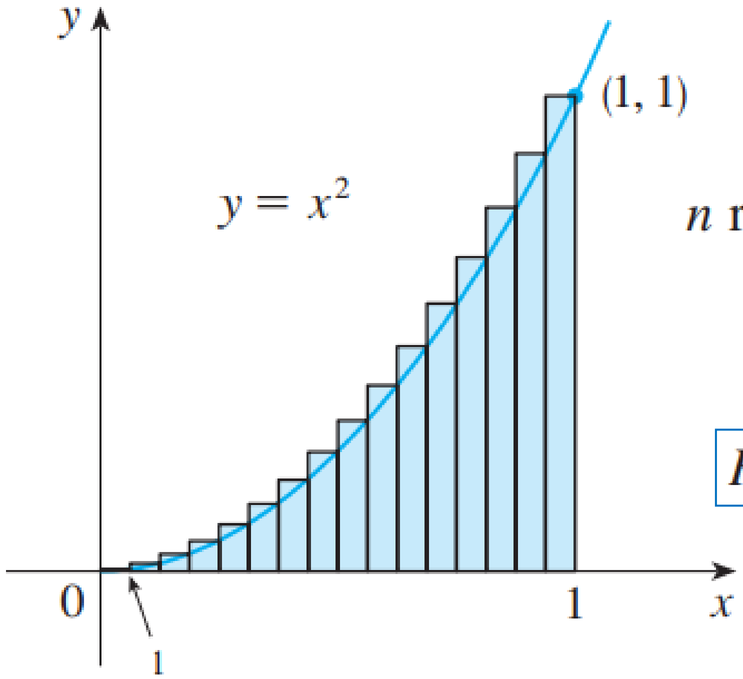
Podemos obtener el valor exacto del Área de S?





n rectángulos

El problema del área

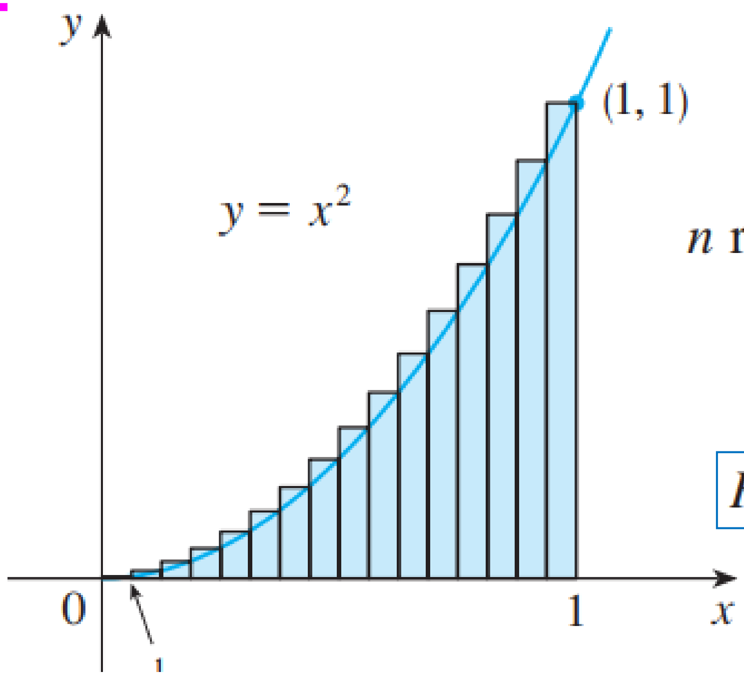


n rectángulos

$\boxed{R_n \text{ es la suma de las áreas de los } n \text{ rectángulos}}$

Cada rectángulo tiene un ancho de $1/n$, y las alturas son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$; es decir, las alturas son $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2$.

El problema del área



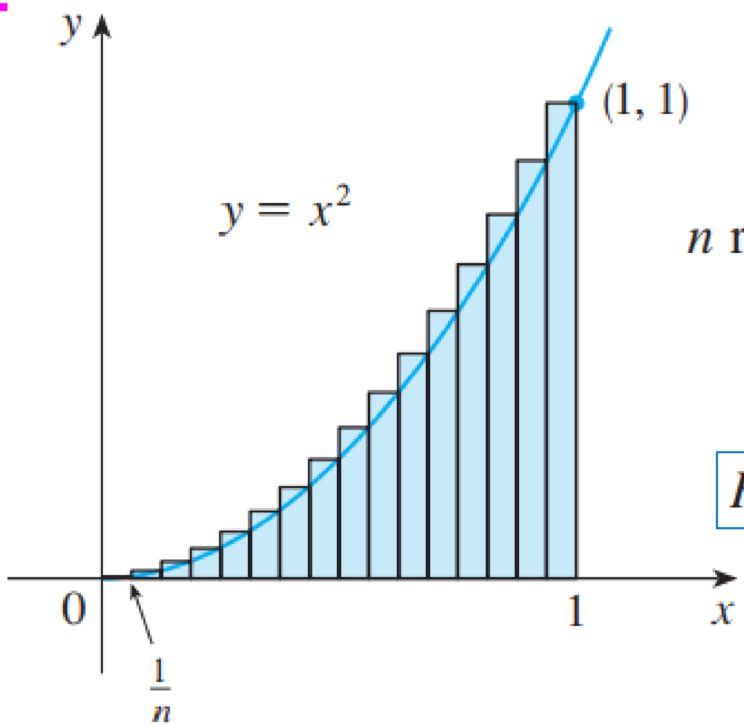
n rectángulos

R_n es la suma de las áreas de los n rectángulos

$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

El problema del área



n rectángulos

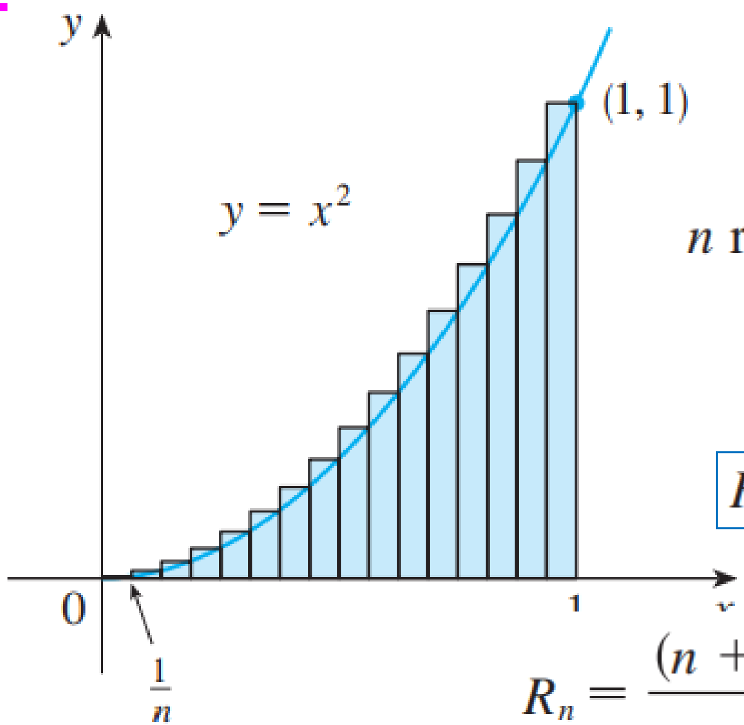
R_n es la suma de las áreas de los n rectángulos

$$R_n = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

El problema del área



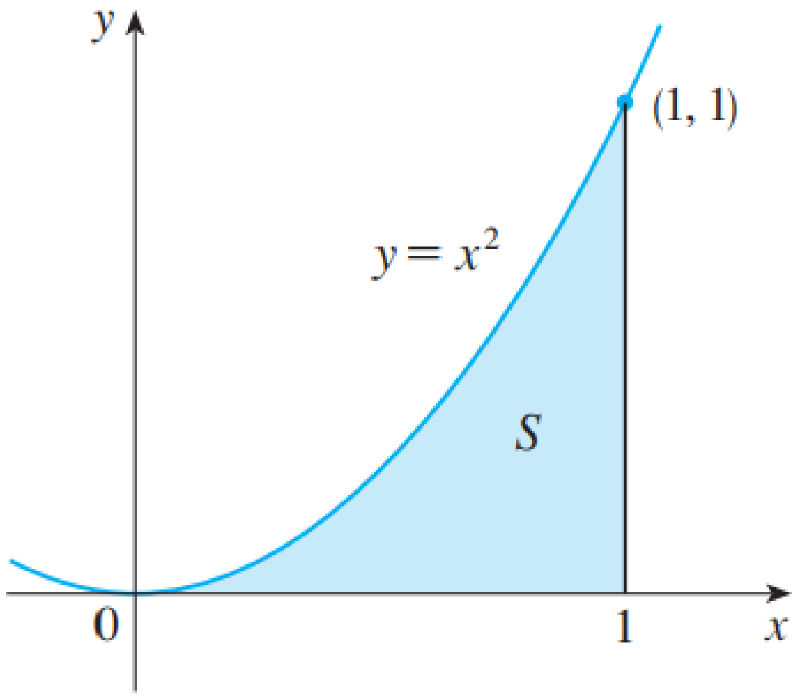
n rectángulos

R_n es la suma de las áreas de los n rectángulos

$$R_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

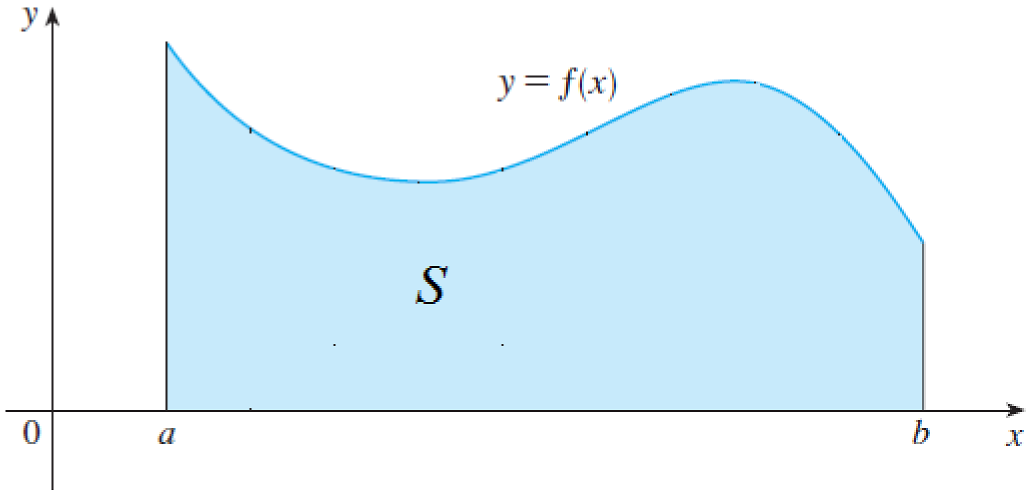
El problema del área

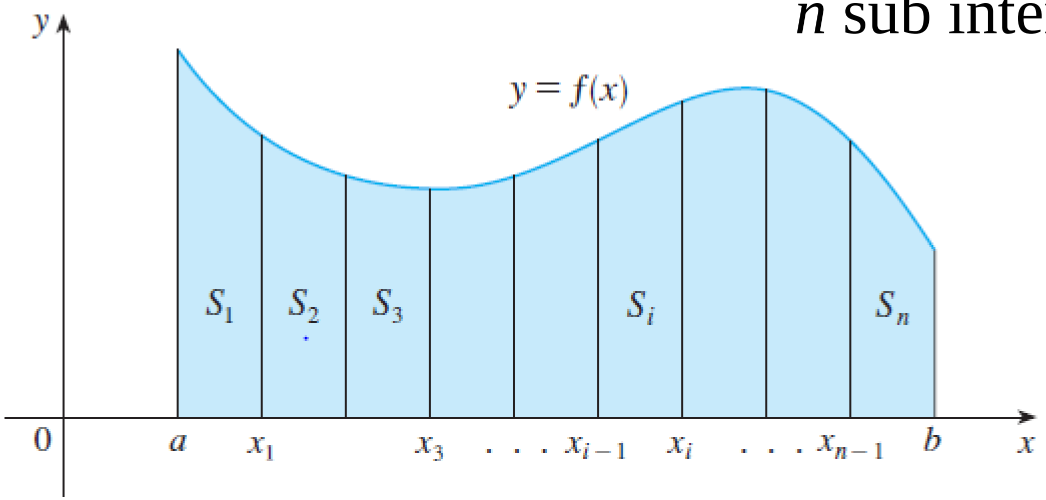


El Área de S es **1/3**

El problema del área

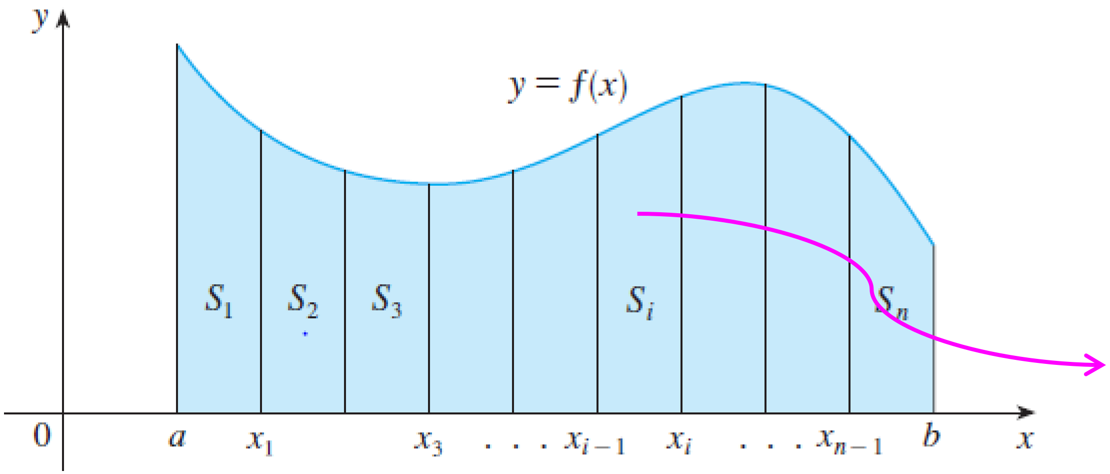
En general

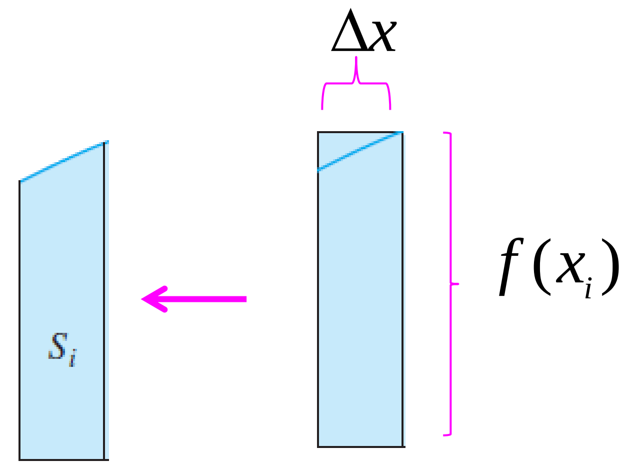


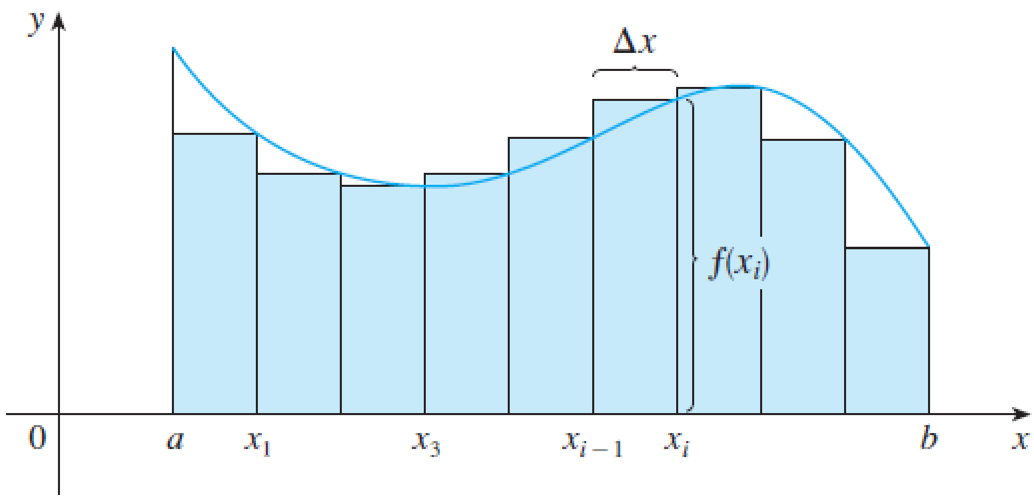


n sub intervalos de longitud

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$





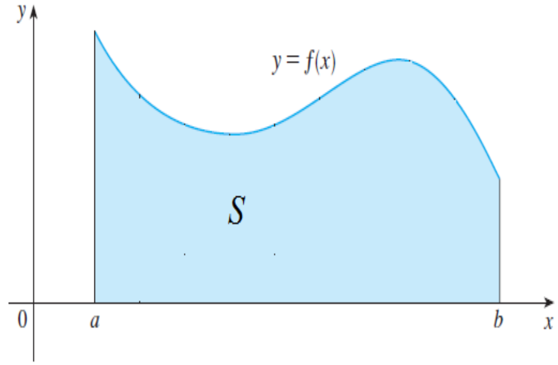


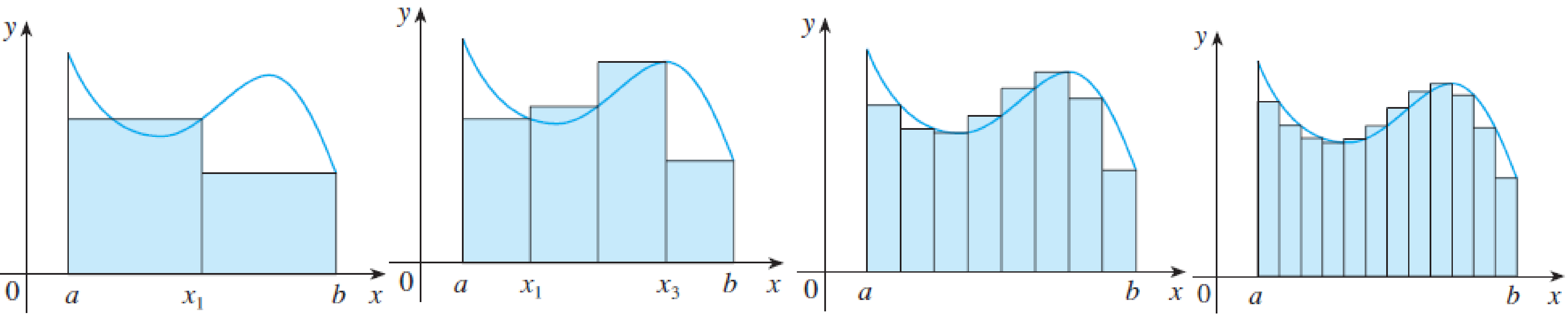
Área del rectángulo

$$f(x_i)\Delta x$$

El área S se aproxima con la suma de las áreas de estos rectángulos

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$





$n = 2$ $\quad$ $n = 4$ $\quad$ $n = 8$ $\quad$ $n = 12$

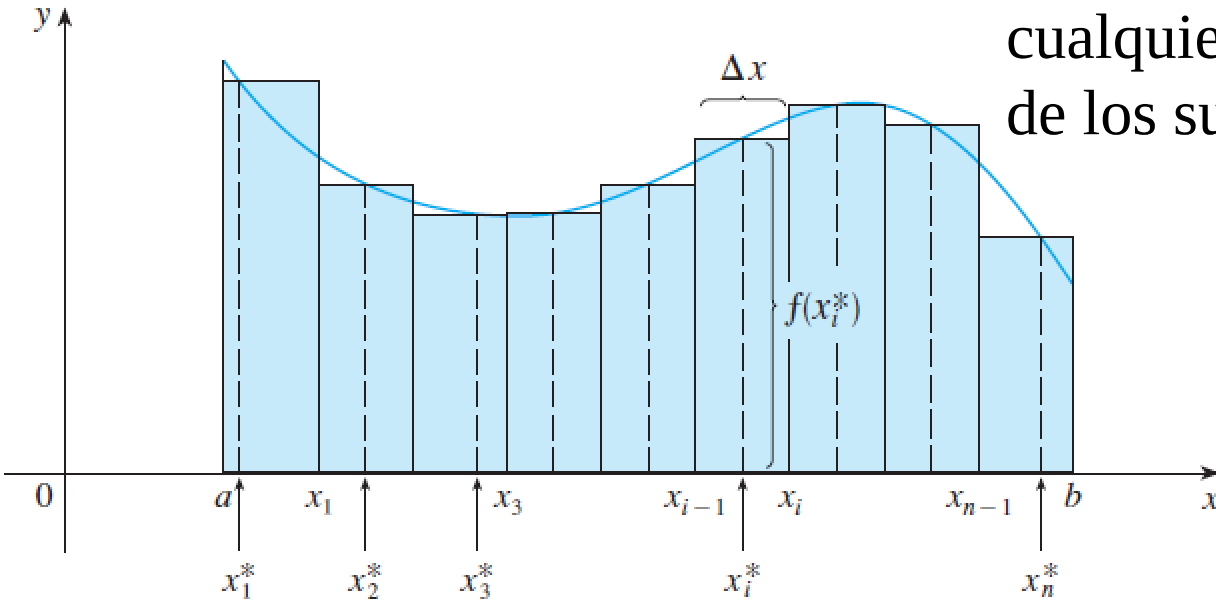
El **Área A** de la región S que se encuentra bajo la gráfica de la función continua *f* es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación.

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \right]$$

Cálculo en una Variable

Integral definida

Podemos considerar cualquier punto interior de los subintervalos: x^*_i



$$A = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x \right]$$

Notación Sigma

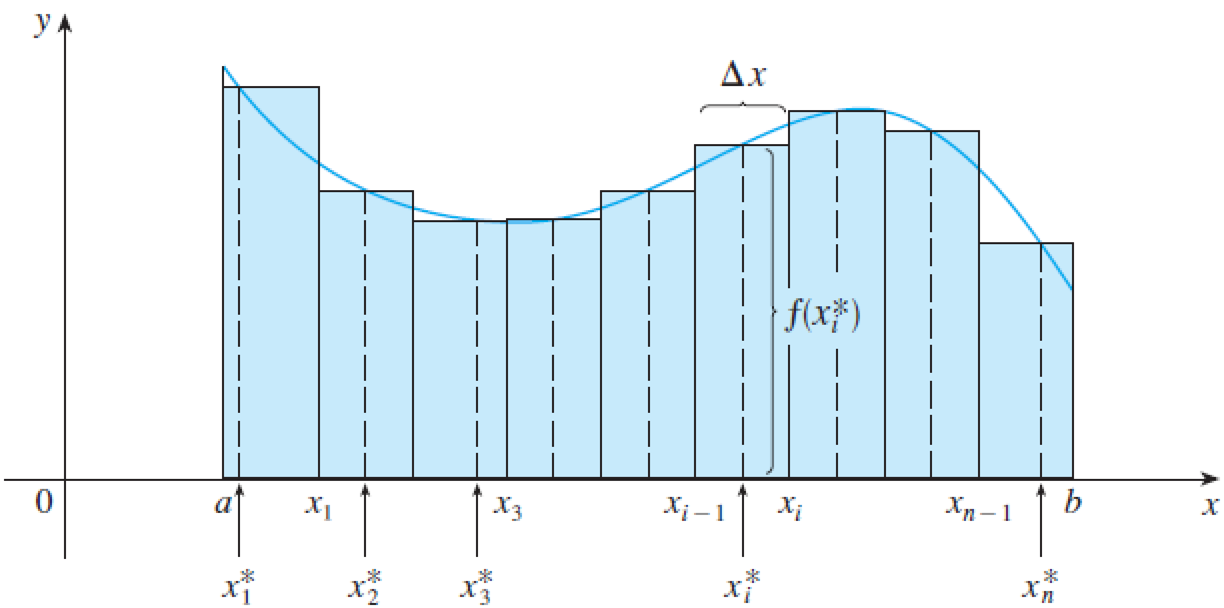
$$f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Sección 5.2: Integral definida

Definición de la integral definida Si f es una función continua definida para $a \leqslant x \leqslant b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Sean $x_0(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n(= b)$ los puntos extremos de estos subintervalos y sean $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ los **puntos muestra** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de *f*, desde *a* hasta *b***, es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

siempre que este límite exista y dé el mismo valor para todos las posibles elecciones de los puntos muestra. Si existe, decimos que f es **integrable** sobre $[a, b]$.



Integral definida

Límite superior

Integrando

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}dx$$

Límite inferior

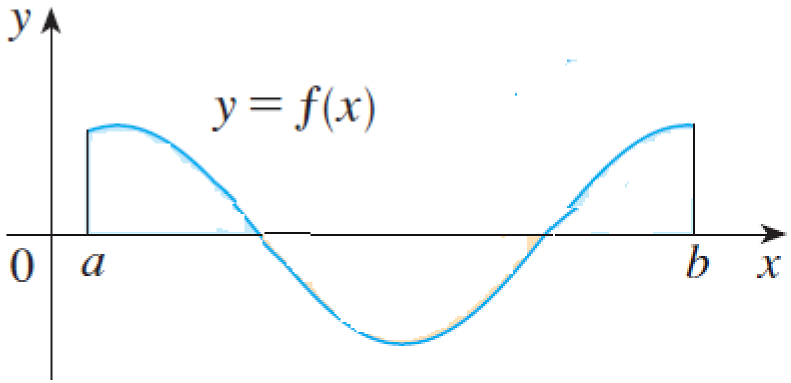
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$ **Suma de Riemann**

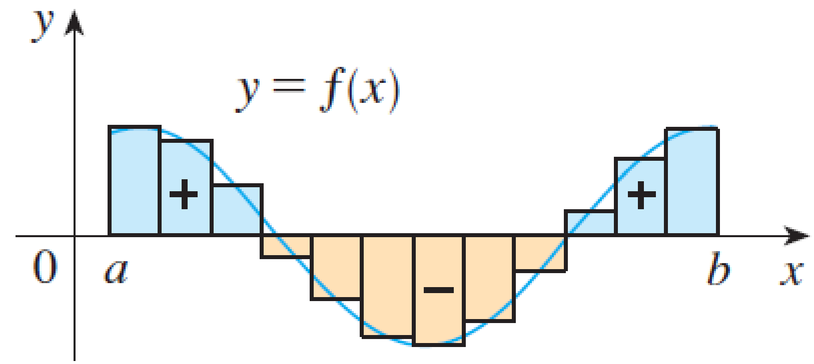
Observar

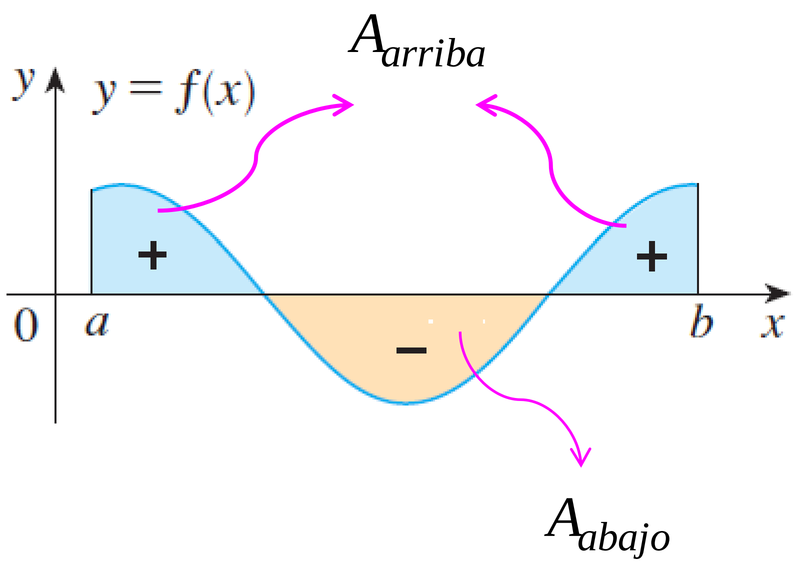
Qué nos dá como resultado la integral definida?

Qué significa el resultado de la integral definida?

Integral definida



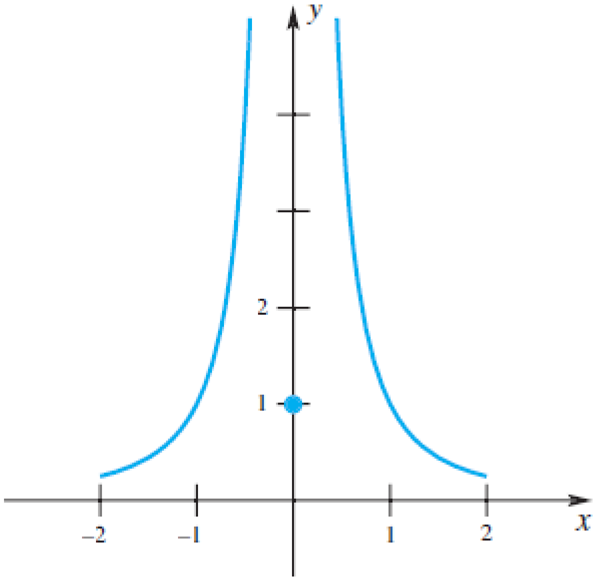




La integral definida puede pensarse como el ***área neta***

$$\int_a^b f(x)dx = A_{arriba} - A_{abajo}$$

¿Cuáles funciones son integrables?



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

***No** es integrable en el intervalo* [-2, 2]

$\boxed{3}$ **Teorema** Si f es continua sobre $[a, b]$, o si f tiene sólo un número finito de discontinuidades de salto, entonces f es integrable sobre $[a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Observar

Una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es ***una familia de funciones.***

Una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es un ***número.***

Propiedades de la integral definida

- Si f está definida en $x = a$, entonces se define

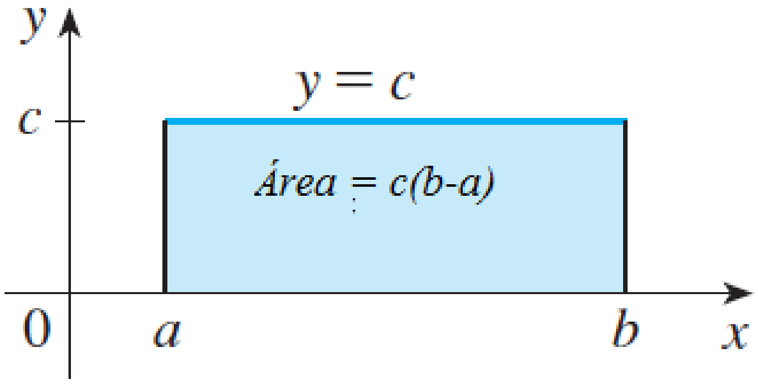
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- Si f es integrable en [a, b], entonces se define

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Propiedades de la integral definida

- $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ donde **c** es una constante

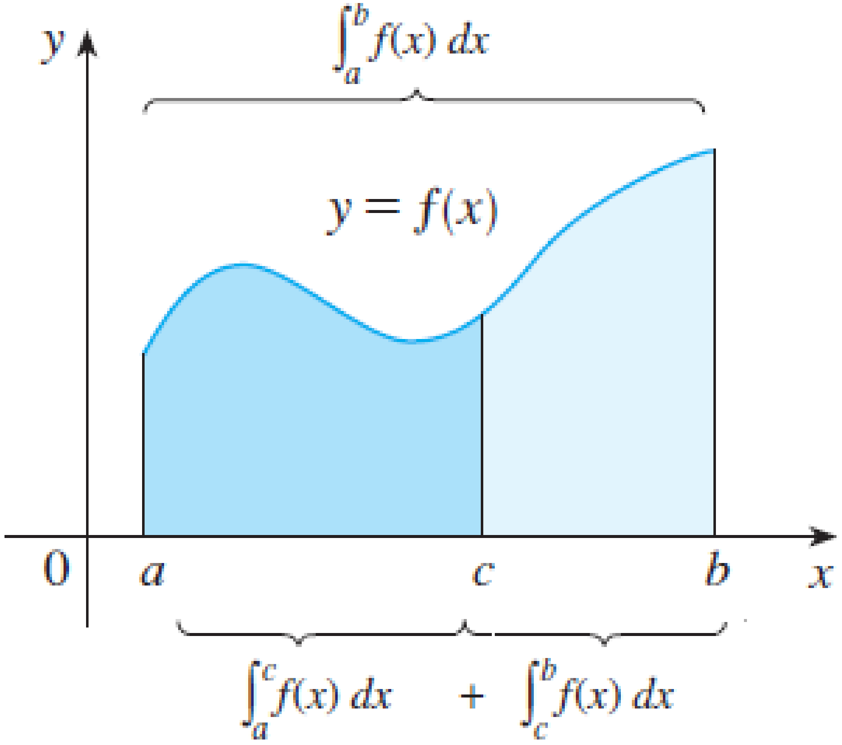


- $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

Propiedades de la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Geométricamente,
Si consideramos $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$

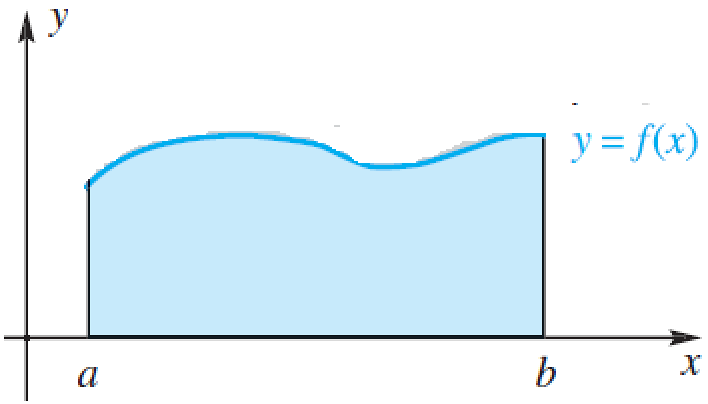


Propiedades de comparación de la integral definida

- Si $f(x) \geq 0$ *para* $a \leq x \leq b$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Interpretación geométrica,
Si consideramos $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$

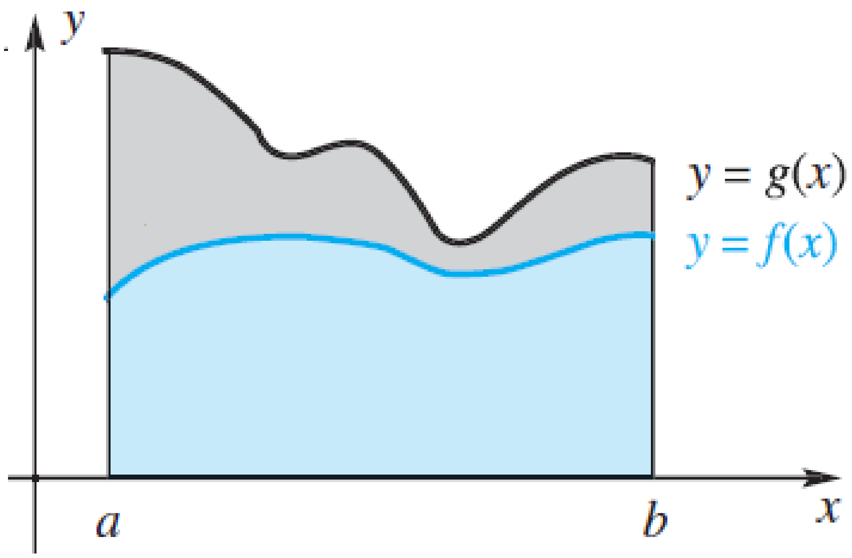


Propiedades de comparación de la integral definida

- Si $f(x) \leq g(x)$ *para* $a \leq x \leq b$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Interpretación geométrica,
Si consideramos $f(x) \geq 0$ y
$g(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$

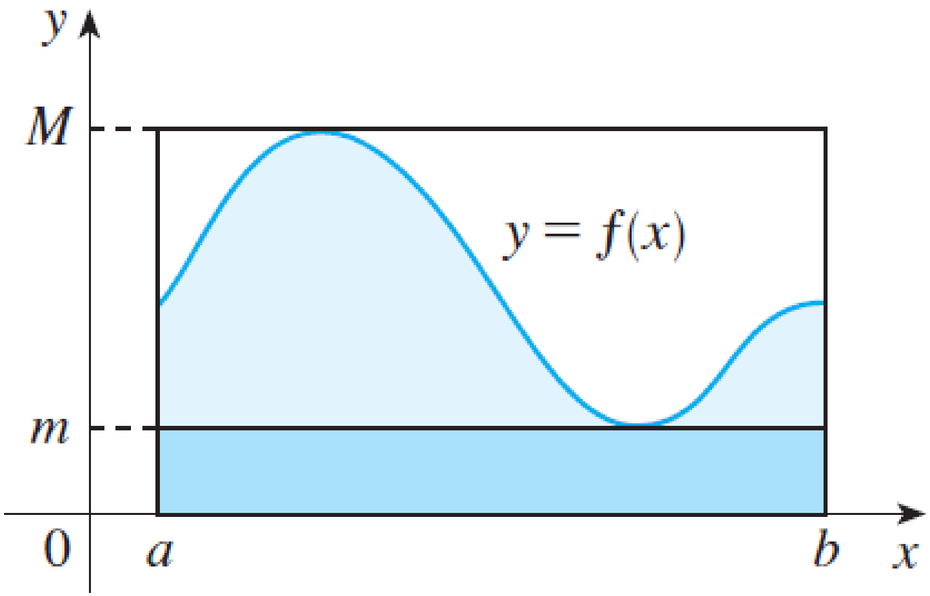


Propiedades de comparación de la integral definida

- Si $m \leq f(x) \leq M$ *para* $a \leq x \leq b$, *entonces*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

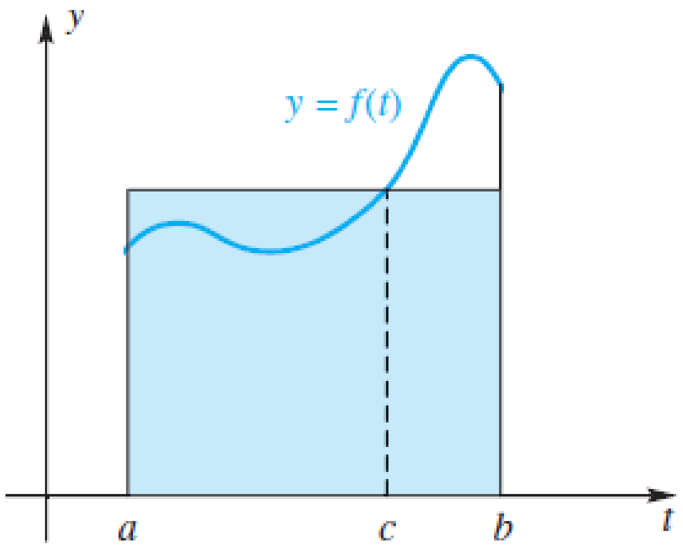
Interpretación geométrica,
Si consideramos $f(x) \geq 0$
para todo x en $[a, b]$



Teorema del valor medio para Integral definida.

Si *f es integrable* en el intervalo [*a*, *b*], entonces existe un c en el intervalo [*a*, *b*] tal que

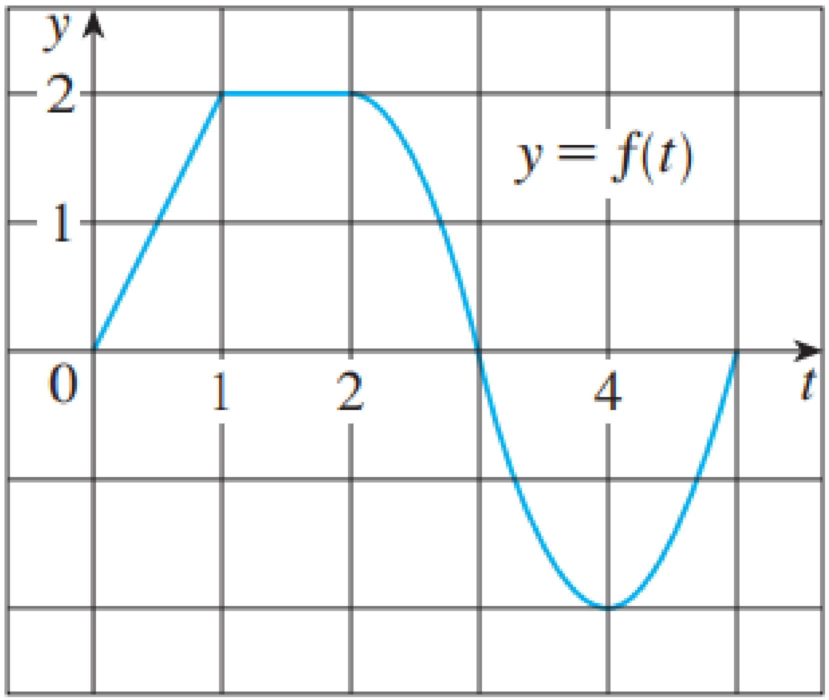
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$



Sección 5.3: Teorema Fundamental del Cálculo

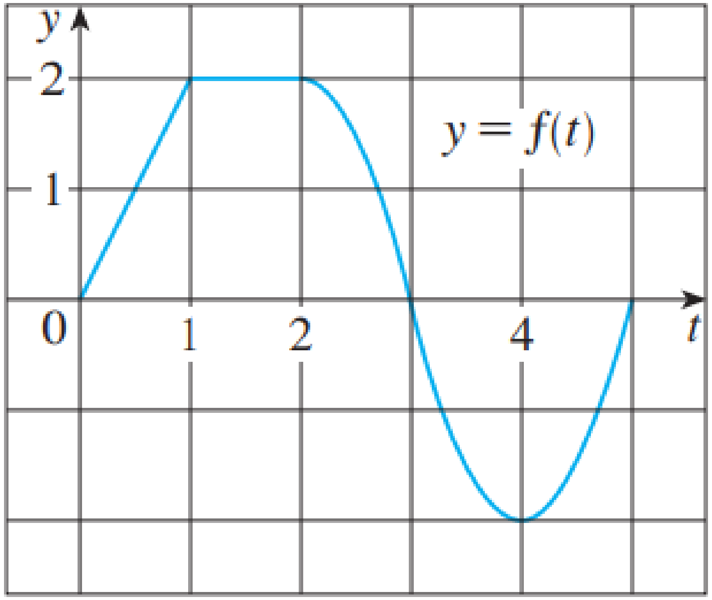
Función área

V **EJEMPLO 1** Si f es la función cuya gráfica se ilustra en la figura 2 y $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, encuentre los valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ y $g(5)$. Luego trace una gráfica aproximada de g.

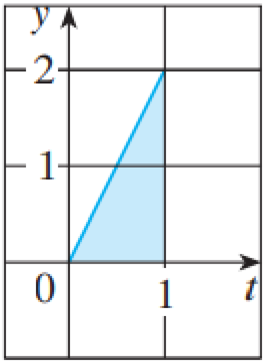


$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

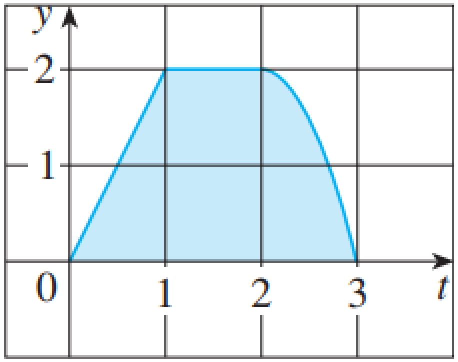
Función área



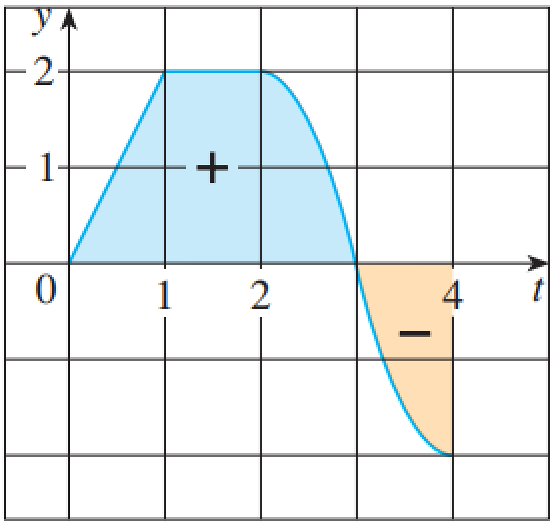
$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$



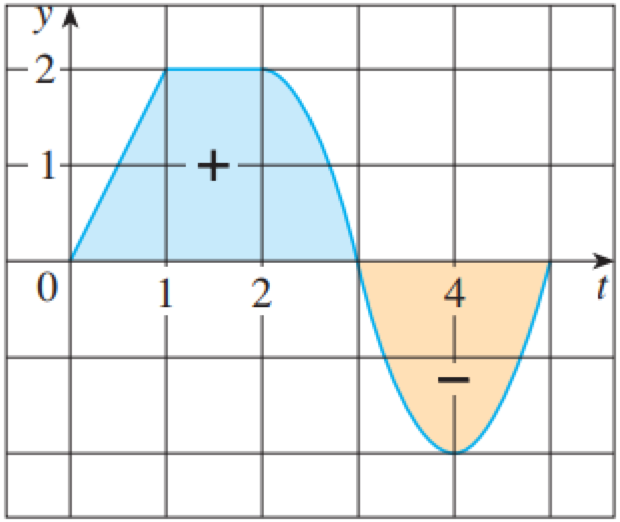
$g(1) = 1$



$g(3) \approx 4.3$

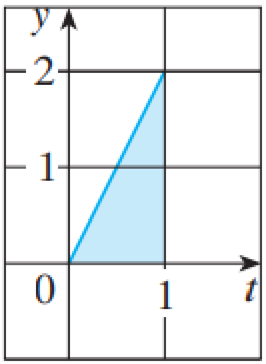


$g(4) \approx 3$

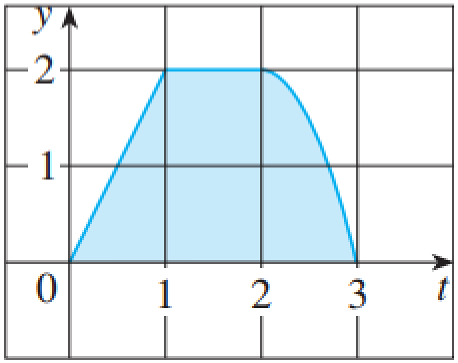


$g(5) \approx 1.7$

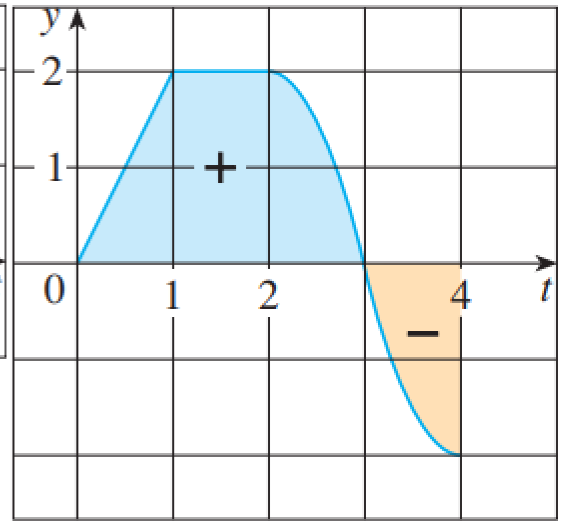
Función área



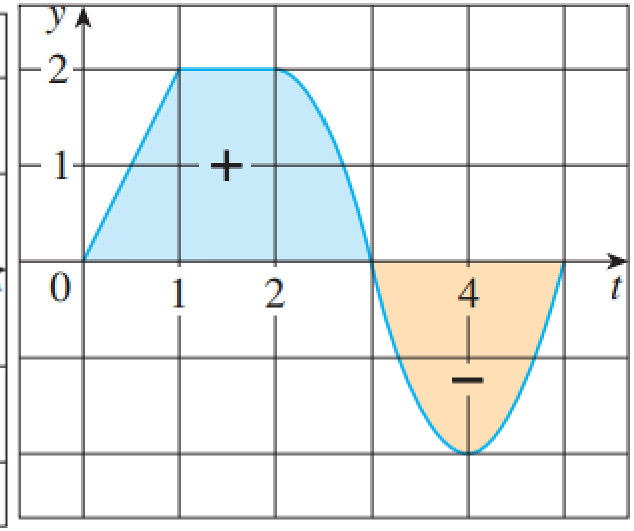
$g(1) = 1$



$g(3) \approx 4.3$

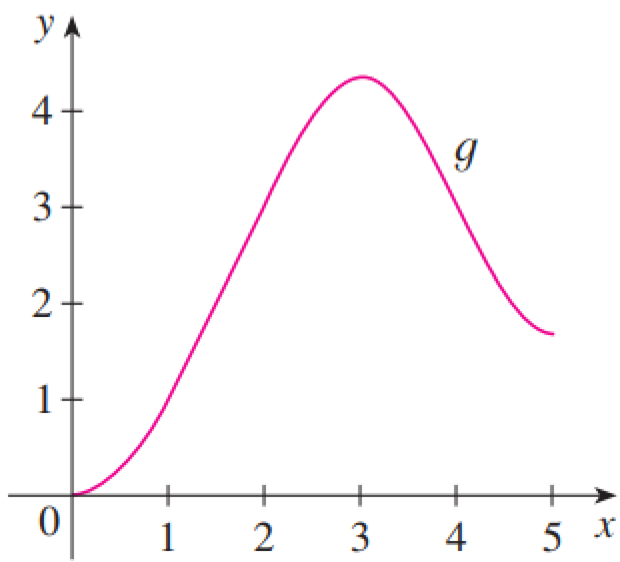


$g(4) \approx 3$



$g(5) \approx 1.7$

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

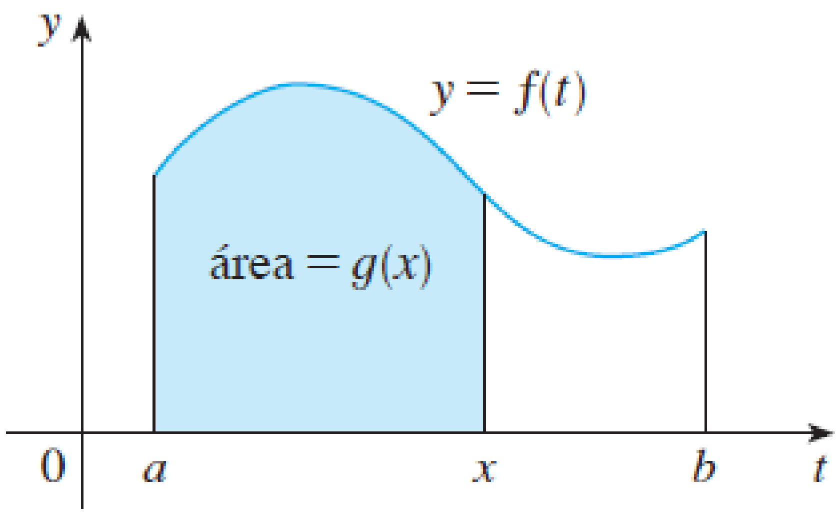


Función área

Sea la función *f* continua sobre [*a*, *b*] y *x* que varía entre *a* y b , consideremos la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Si $f(t) \geq 0$ para todo *t* en [*a*, *b*], entonces g(*x*) puede interpretarse como el área bajo la gráfica de *f* desde *a* hasta *x*.



Teorema fundamental del cálculo ***Parte 1***

Suponga que ***f*** es continua sobre $[a, b]$, entonces la función ***g*** definida por $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua sobre el $[a, b]$ y es derivable sobre (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

Ejemplo

Sea $\mathrm{g(x)} = \int_0^{\mathrm{x}} (t^2 - 1)\mathrm{dt}$.

a) Hallar g'

b) Indicar, si existe , el valor máximo de la función $\mathrm{g(x)} = \int_0^{\mathrm{x}} (t^2 - 1)\mathrm{dt}$ en [1, 3].

Teorema fundamental del cálculo ***Parte 1***

Suponga que $\boldsymbol{f}$ es continua sobre $[a, b]$, entonces la función $\boldsymbol{g}$ definida por $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua sobre el $[a, b]$ y es derivable sobre (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental del cálculo ***Parte 2***

Suponga que f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f, es decir $F'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental del cálculo

Suponga que f es continua sobre $[a, b]$, entonces

- Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ entonces $g'(x) = f(x)$

- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ donde F es cualquier antiderivada de f, es decir $F'(x) = f(x)$

Integral definida

Regla de sustitución para integrales definidas.

Si g' es continua sobre $[a, b]$ y f es continua sobre el rango $u = g(x)$entonces

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Integración por partes para integrales definidas.

Si u y v son funciones de x y tienen derivadas continuas

$$\int_a^b u(x)dv = u(x)v(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du$$

Teorema de Simetría

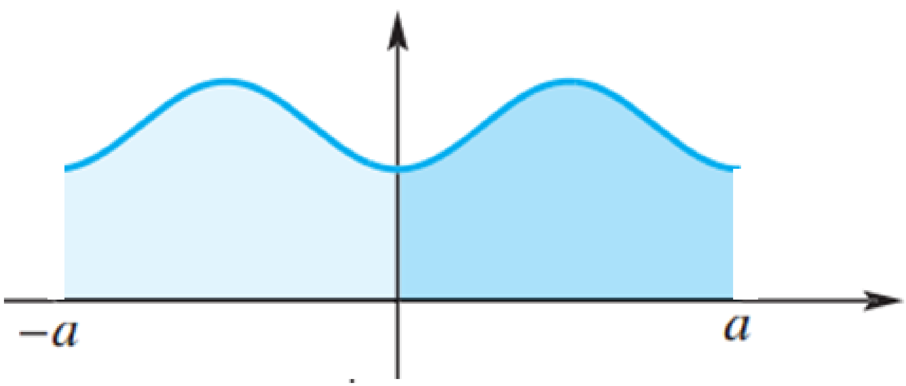
Si f es una función par, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

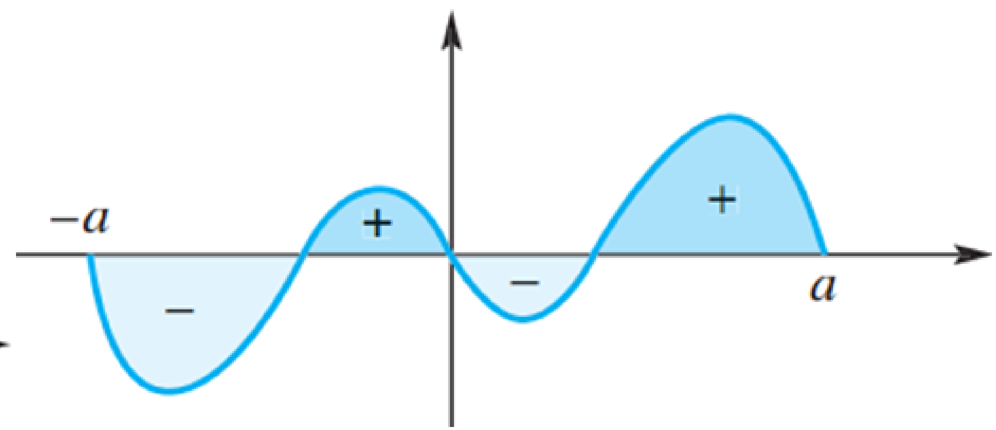
Si f es una función impar, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Interpretación geométrica



Función par



Función impar

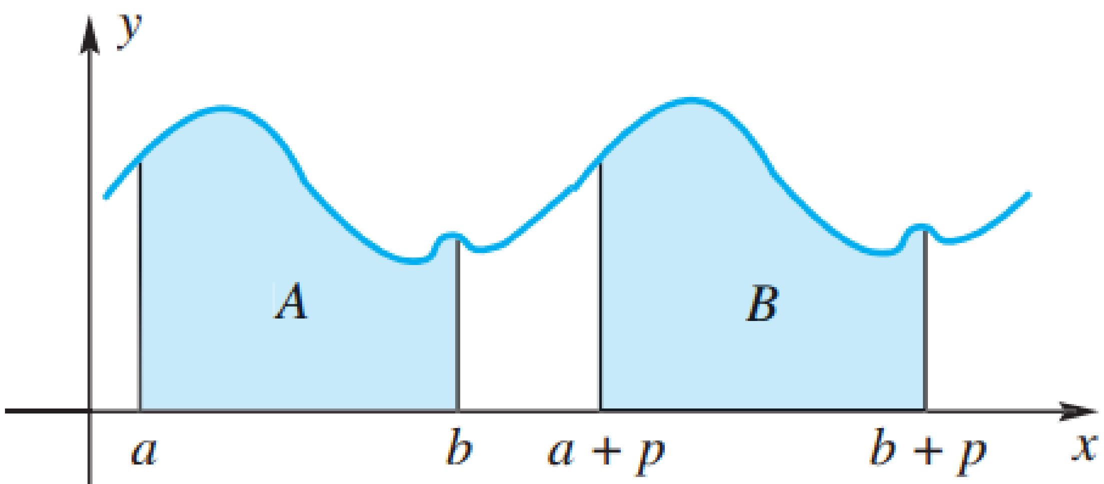
Funciones periódicas

Una función f es *periódica* si existe un número p tal que $f(x+p) = f(x)$, p es el período de la función.

Si f es periódica de período p , *entonces*

$$\int_a^b f(x)d = \int_{a+p}^{b+p} f(x)dx$$

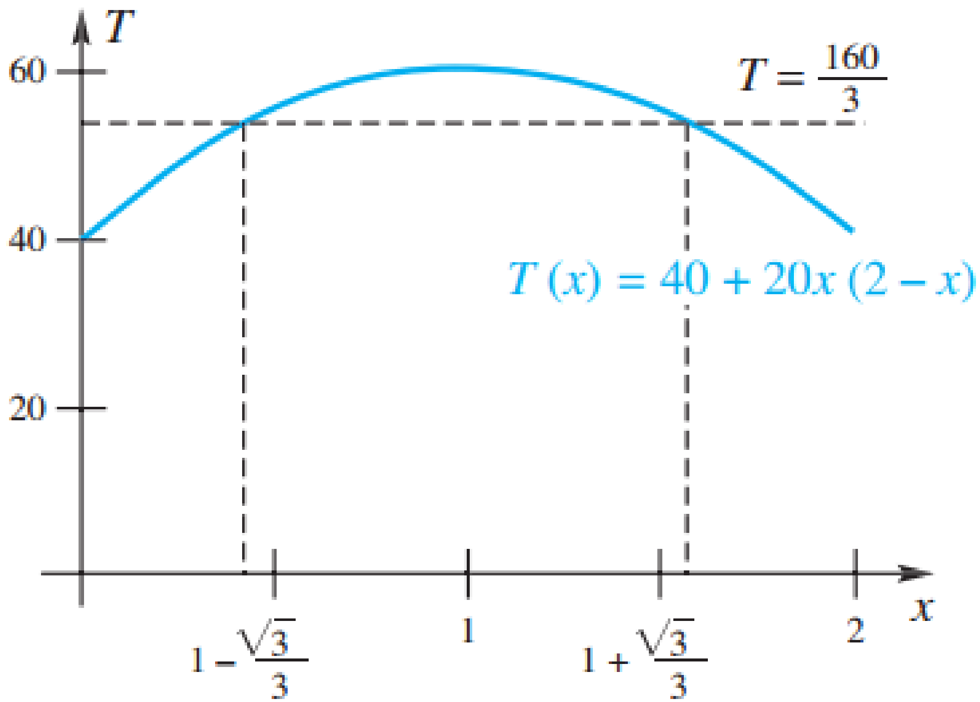
Interpretación geométrica



Área (A) = Área (B)

Aplicación del valor medio para Integral definida.

Suponga que la temperatura, en grados Fahrenheit, de una barra metálica de longitud de 2 pies, depende de la posición x, de acuerdo con la función $T(x) = 40 + 20x(2 - x)$. Determine la temperatura promedio en la barra. ¿Existe algún punto en donde la temperatura real sea igual a la temperatura promedio?



Cálculo en una Variable

Ejercicios

Ejercicio 1:

Calcular $\int_0^3 (x^3 - 2x)\mathrm{d}x$

Ejercicio 2:

Hallar las siguientes integrales:

a. $\int_1^3 -\mathrm{x}e^{5x^2-7}\mathrm{dx} =$

b. $\int_{-3}^3 \mathrm{sen(x)dx} =$

c. $\int_{-2}^2 (\mathrm{x}^4 - 5\mathrm{x}^2)\mathrm{dx} =$

d. $\int_{-2}^0 \frac{2\mathrm{x}}{\sqrt{5-4\mathrm{x}}}\mathrm{dx} =$

e. $\int_0^{\pi/2} \mathrm{x\ senx\ dx}$

Ejemplos

Ejercicio 2 (Estrategia para el cálculo de integrales)

$$\int_{-2\pi}^{3\pi} |\cos(x)| dx =$$

Ejercicio 3

Calcular el valor promedio de $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo [0, 4]

Ejercicio 4

Hallar la derivada de $g(x) = \int_0^{x^2} t e^t dt$.

Bibliografía

- STEWART, James, (2012): *"Cálculo de una variable*- *Trascendentes y tempranas"* - 7ma edición - Cengage – Learning – México.