

Coloquio I

Aplicaciones de la integral definida: Cálculo de área entre curvas

Dr. Juan Felipe Restrepo
juan.restrepo@uner.edu.ar

Departamento Académico de Matemática
Cálculo en una Variable

Temas de clase:

1. La integral definida.

Sec. 5.2 - Pág. 371.

2. Cálculo de área entre curvas.

Sec. 6.1 - Pág. 422.

Teorema: (Pág. 391 Stewart (2012))

Teorema fundamental del cálculo, parte 2

HIPÓTESIS

Si f es continua sobre $[a, b]$,

TESIS

entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

donde F es cualquier antiderivada de f .

Propiedades de la integral definida:

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces:

1.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

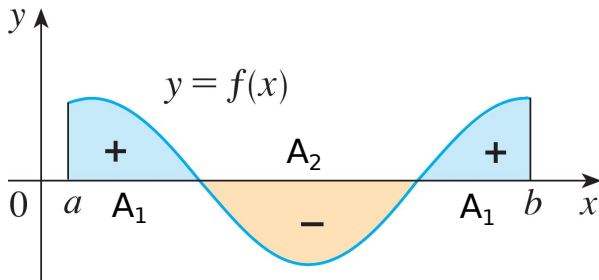
2. Si $c \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

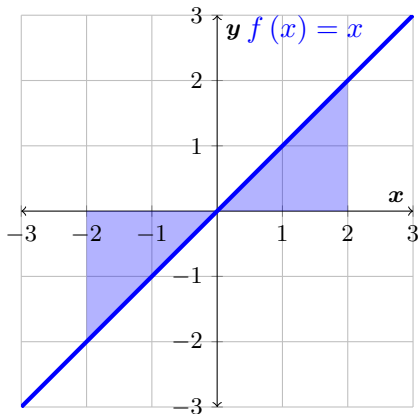
La integral definida y el cálculo de áreas:

Una integral definida puede interpretarse como un **área neta** (diferencia entre áreas):

$$\int_a^b f(x) dx = A^+ - A^- = 2A_1 - A_2,$$

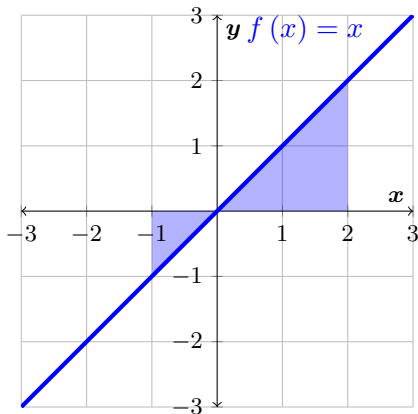


La integral definida y el cálculo de áreas:



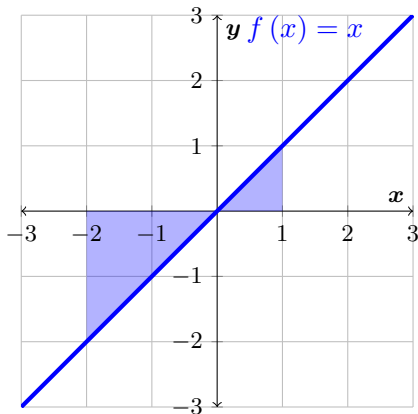
$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^2 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-2}^2 \\ &= \frac{2^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = 2 - 2 = 0.\end{aligned}$$

La integral definida y el cálculo de áreas:



$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^2 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^2 \\ &= \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 2 - 1/2 = 3/2.\end{aligned}$$

La integral definida y el cálculo de áreas:



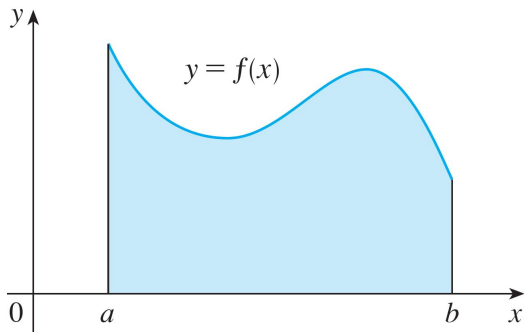
$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 f(x) dx &= \int_{-2}^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-2}^1 \\ &= \frac{1^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = 1/2 - 2 = -3/2.\end{aligned}$$

Área bajo la curva:

Si $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$A_{\text{bajo la curva}} = \int_a^b f(x) \, dx \geq 0,$$

y es igual al área bajo la curva f desde a hasta b .

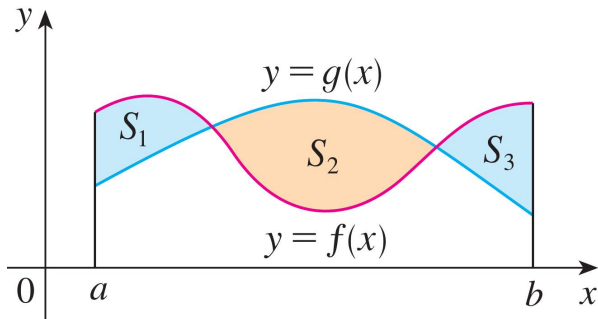


Cálculo de áreas entre curvas:

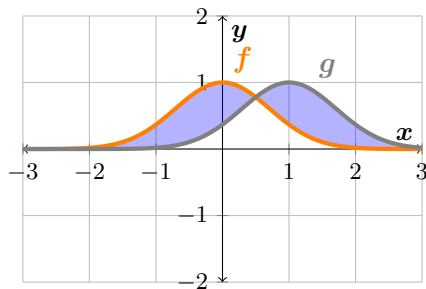
Área entre curvas:

Sean $y = f(x)$ y $y = g(x)$ dos curvas continuas en el intervalo $[a, b]$, entonces el área entre ellas es:

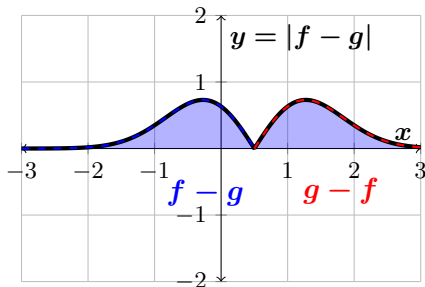
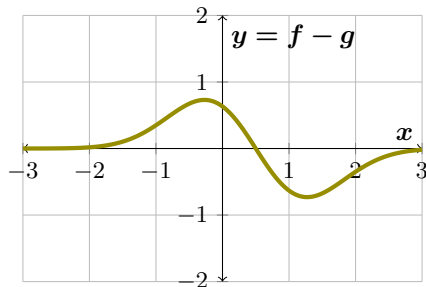
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



La integral definida y el cálculo de áreas:



$$|f - g| = \begin{cases} f - g & \text{si } f \geq g \\ g - f & \text{si } f < g \end{cases}$$



Ejemplo:

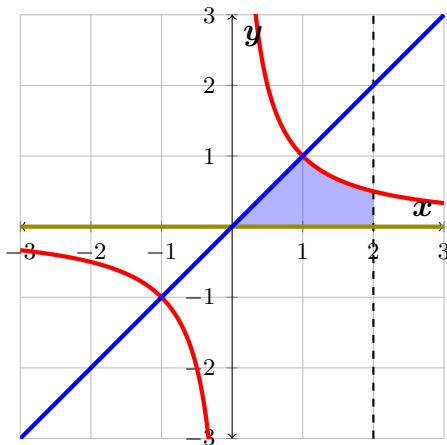
Encuentre el área delimitada por las curvas:

$$f(x) = x + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = (x - 1)^2.$$

La integral definida y el cálculo de áreas:

Ejemplo:

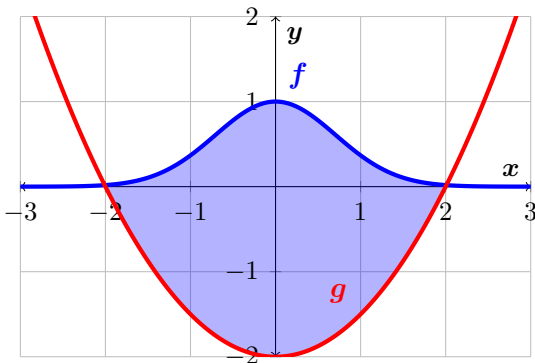
Encuentre el área delimitada por las curvas $y = x$ y $y = 1/x$, la recta $x = 2$ y el eje de las abscisas, en el primer cuadrante.



La integral definida y el cálculo de áreas:

En la figura se presentan las gráficas de las funciones f y g . Calcule el área entre curvas teniendo en cuenta que:

$$g(x) = \frac{x^2}{2} - 2 \quad \text{y} \quad \int_2^{-2} f(x) \, dx = -1.8.$$



Stewart, J., 2012. Cálculo de varias variables trascendentes tempranas, 7ma edición. Cengage Learning Editores.