

Coloquio I

Análisis de Funciones

Dr. Juan Felipe Restrepo
juan.restrepo@uner.edu.ar

Departamento Académico de Matemática
Cálculo en una Variable

Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

Trazado de Curvas

Referencias

Temas de clase:

1. Trazado de curvas.

Sección 4.5 Pág. 310.

Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

Trazado de Curvas

Referencias

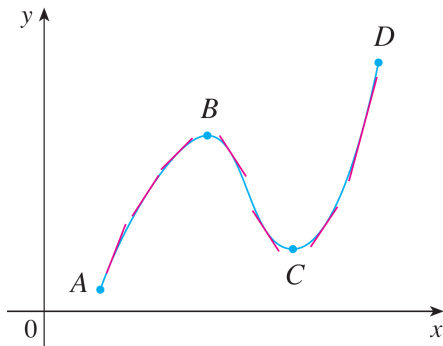
Qué indica f' respecto a f

Qué indica f' respecto a f :

1. La primera derivada nos dice en que intervalos del dominio f es creciente o decreciente.
2. La primera derivada nos ayuda a identificar los valores extremos de f .

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

- Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f **es creciente** sobre ese intervalo.
- Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f **es decreciente** sobre ese intervalo.



Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

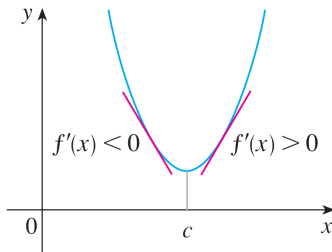
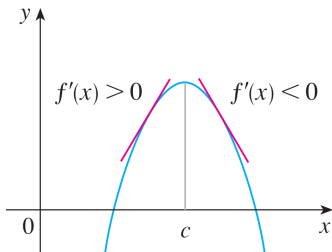
Trazado de Curvas

Referencias

Valores extremos: prueba de la primera derivada

Suponga que $x = c$ es un número crítico de una función continua f .

1. Si f' **cambia de positiva a negativa** en c , entonces $f(c)$ es un **máximo local**.
2. Si f' **cambia de negativa a positiva** en c , entonces $f(c)$ es un **mínimo local**.



Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

Trazado de Curvas

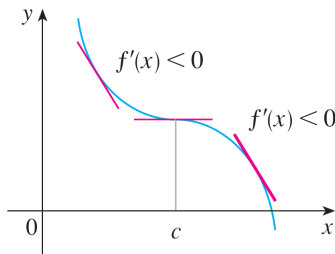
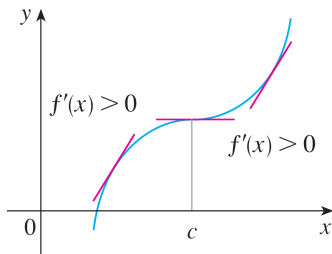
Referencias

Qué indica f' respecto a f

Valores extremos: prueba de la primera derivada

Suponga que $x = c$ es un número crítico de una función continua f .

1. Si f' **cambia de positiva a negativa** en c , entonces $f(c)$ es un **máximo local**.
2. Si f' **cambia de negativa a positiva** en c , entonces $f(c)$ es un **mínimo local**.
3. Si f' **NO cambia de signo** en c , entonces f **NO tiene ningún valor extremo** en c .



Definición: (Pág. 277 Stewart (2012))

Número crítico:

Un número crítico de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que:

1. $f'(c) = 0$ o,

Núm. crítico estacionario

2. $f'(c)$ no existe.

Núm. crítico singular

Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

Trazado de Curvas

Referencias

Definición: (Pág. 277 Stewart (2012))

Número crítico:

Un número crítico de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que:

1. $f'(c) = 0$ o,

Núm. crítico estacionario

2. $f'(c)$ no existe.

Núm. crítico singular

Teorema: (Pág. 278 Stewart (2012))

Si f tiene un máximo o un mínimo **local** en $x = c$, entonces c es un número crítico.

Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

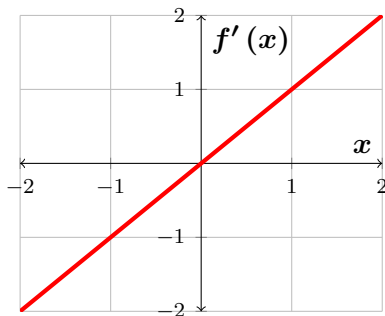
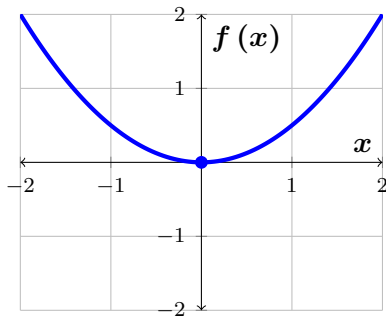
Trazado de Curvas

Referencias

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$f'(x) = x$$



Mín. local $f(0) = 0$, ubicado en $x = 0$.

$f'(0) = 0$ y $x = 0$ es número crítico.

Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

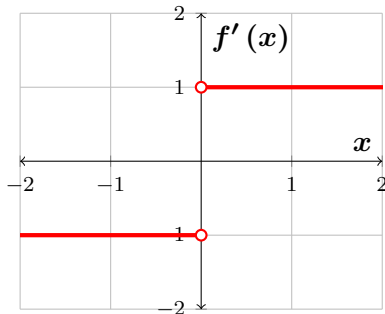
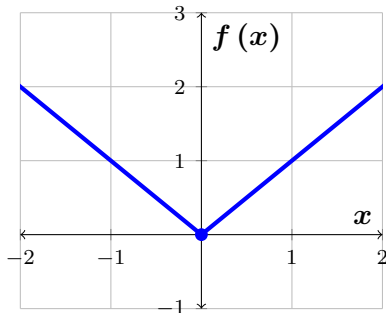
Trazado de Curvas

Referencias

Ejemplo:

$$f(x) = |x|$$

$$f'(x) = \frac{|x|}{x}$$



Mín. local $f(0) = 0$, ubicado en $x = 0$. $f'(0)$ no existe y $x = 0$ es número crítico.

Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

Trazado de Curvas

Referencias

Importante:

Si c es un número crítico, f **puede no tener** un máximo o un mínimo **local** en $x = c$.

Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

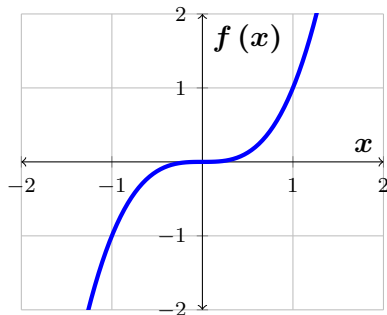
Qué indica f'' respecto a f

Trazado de Curvas

Referencias

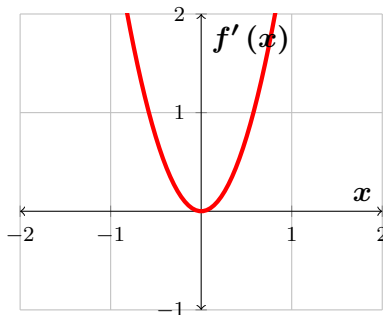
Ejemplo:

$$f(x) = x^3$$



No hay un mín. local en $x = 0$.

$$f'(x) = 3x^2$$



$f'(0) = 0$ y $x = 0$ es número crítico.

Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

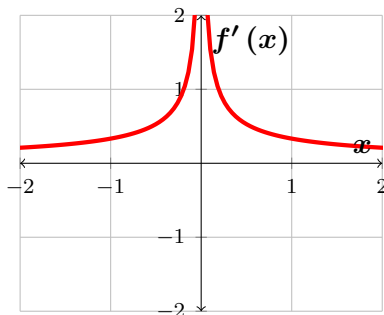
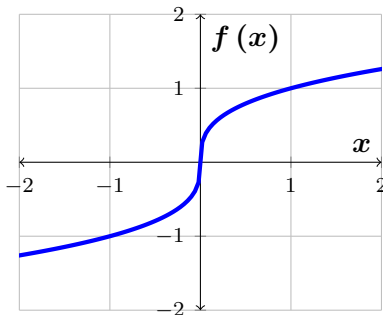
Trazado de Curvas

Referencias

Ejemplos:

$$f(x) = x^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$



No hay un mín. local en $x = 0$.

$f'(0)$ no existe y $x = 0$ es número crítico.

Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

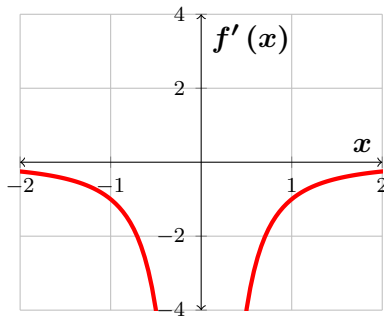
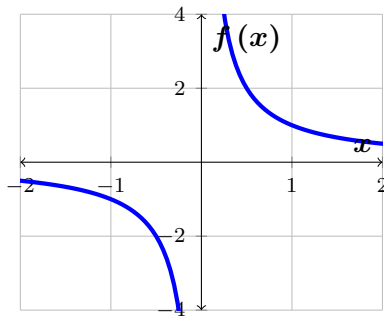
Trazado de Curvas

Referencias

Ejemplos:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$



No hay un mín. local en $x = 0$, $f(0)$ no está definida.

$f'(0)$ no existe y $x = 0$ no es número crítico.

Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

Trazado de Curvas

Referencias

Qué indica f'' respecto a f

Qué indica f'' respecto a f :

1. La segunda derivada nos dice en que intervalos del dominio f es cóncava hacia arriba o hacia abajo.
2. La segunda derivada nos ayuda a identificar los puntos de inflexión de f .

Prueba de concavidad:

- Si $f''(x) > 0$ para toda $x \in I$, entonces la gráfica de f es **cóncava hacia arriba sobre I** .
- Si $f''(x) < 0$ para toda $x \in I$, entonces la gráfica de f es **cóncava hacia abajo sobre I** .

Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

Trazado de Curvas

Referencias

Definición: (Pág. 294 Stewart (2012))

Punto de inflexión:

Un punto P sobre una curva $y = f(x)$ se llama punto de inflexión si f es allí continua y la curva cambia de concavidad.

Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

Trazado de Curvas

Referencias

Pasos para graficar f :

1. Determinar el dominio de la función.
2. Encontrar la intersección con los ejes de coordenadas.
3. Determinar las asíntotas verticales.
4. Determinar el comportamiento de f cuando $x \rightarrow \pm\infty$ y las asíntotas horizontales.
5. Encontrar los valores críticos de f y determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6. Determinar los valores máximos y mínimos de f .
7. Encontrar los valores críticos de f' (valores críticos de segunda especie de f) y determinar los intervalos de concavidad.
8. Determinar los puntos de inflexión f .
9. Con la ayuda de la gráfica, analizar el rango de f .

Introducción

Qué indica f' respecto a f

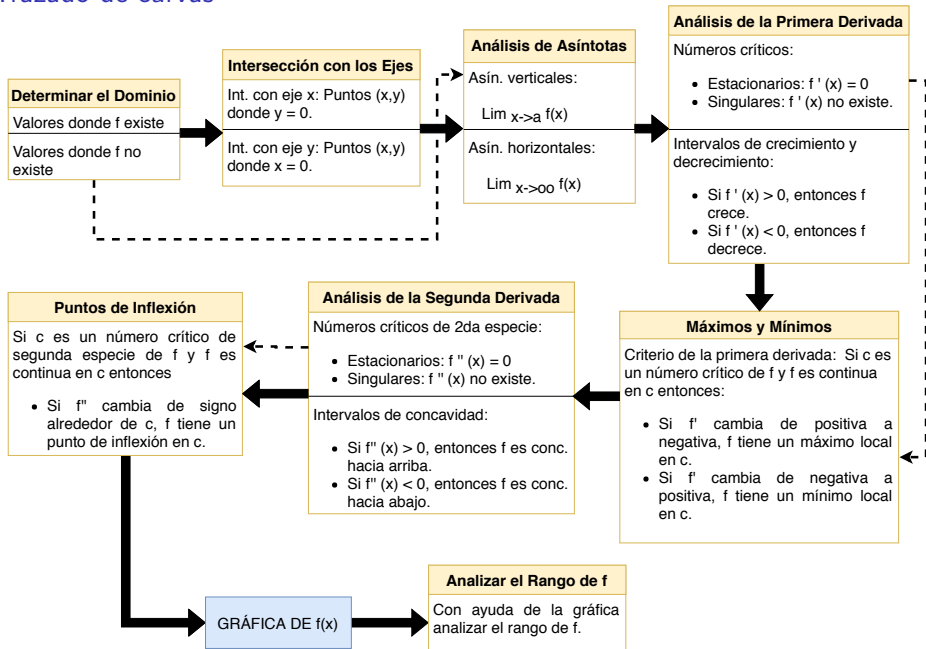
Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

Trazado de Curvas

Referencias

Trazado de curvas



Ejemplo:

Realizar el análisis de función para:

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$$

Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

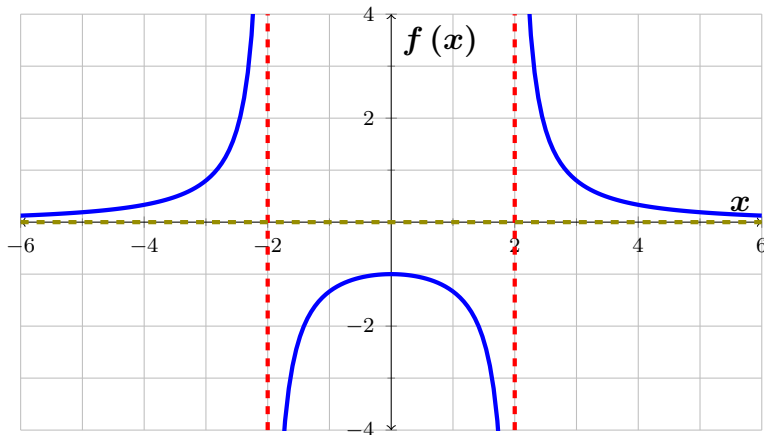
Qué indica f'' respecto a f

Trazado de Curvas

Referencias

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$$



Introducción

Qué indica f' respecto a f

Definición de número crítico

Qué indica f'' respecto a f

Trazado de Curvas

Referencias

Stewart, J., 2012. Cálculo de varias variables trascendentes tempranas, 7ma edición. Cengage Learning Editores.