

# Coloquio I

## Técnicas de Integración: Tablas de Integración

Dr. Juan Felipe Restrepo  
[juan.restrepo@uner.edu.ar](mailto:juan.restrepo@uner.edu.ar)

Departamento Académico de Matemática  
Cálculo en una Variable

## Temas de clase:

1. Tablas de integración.

**Páginas de referencia. 6-10**

- Las tablas de integrales son útiles cuando abordamos integrales difíciles.
- Por lo general las integrales no surgen en la forma en la que se encuentran en la tabla.
- Necesitamos utilizar la regla de sustitución y/o manipulación algebraica para transformar la integral y poder utilizar la tabla.
- En el libro de clase, la tabla de integrales se encuentra en las páginas de referencia 6 – 10.

## Cómo buscar en la tabla?

En las tablas las integrales se agrupan por forma

### TABLA DE INTEGRALES

---

#### Formas exponenciales y logarítmicas

$$96. \int u e^{au} du = \frac{1}{a^2} (au - 1)e^{au} + C$$

$$97. \int u^n e^{au} du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du$$

$$98. \int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \sin bu - b \cos bu) + C$$

#### Formas trigonométricas inversas

$$87. \int \sin^{-1} u du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1 - u^2} + C$$

$$88. \int \cos^{-1} u du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1 - u^2} + C$$

$$89. \int \tan^{-1} u du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) + C$$

## Ejemplo

Resolver:

$$\int 5z \cos^{-1} z dz$$

### Formas trigonométricas inversas

$$87. \int \sin^{-1} u \, du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1 - u^2} + C$$

$$88. \int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1 - u^2} + C$$

$$89. \int \tan^{-1} u \, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) + C$$

$$90. \int u \sin^{-1} u \, du = \frac{2u^2 - 1}{4} \sin^{-1} u + \frac{u\sqrt{1 - u^2}}{4} + C$$

$$91. \int u \cos^{-1} u \, du = \frac{2u^2 - 1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1 - u^2}}{4} + C$$

$$92. \int u \tan^{-1} u \, du = \frac{u^2 + 1}{2} \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$$

$$93. \int u^n \sin^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[ u^{n+1} \sin^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1 - u^2}} \right], \quad n \neq -1$$

$$94. \int u^n \cos^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[ u^{n+1} \cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1 - u^2}} \right], \quad n \neq -1$$

$$95. \int u^n \tan^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[ u^{n+1} \tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{1 + u^2} \right], \quad n \neq -1$$

Por lo general, necesitamos utilizar la regla de **sustitución** y/o **manipulación algebraica** para transformar la integral y poder utilizar la tabla.

### TABLA DE INTEGRALES

---

#### Formas exponenciales y logarítmicas

$$96. \int u e^{au} du = \frac{1}{a^2} (au - 1)e^{au} + C$$

$$97. \int u^n e^{au} du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du$$

$$98. \int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \sin bu - b \cos bu) + C$$

Por lo general, necesitamos utilizar la regla de **sustitución** y/o **manipulación algebraica** para transformar la integral y poder utilizar la tabla.

### TABLA DE INTEGRALES

#### Formas exponenciales y logarítmicas

$$96. \int u e^{au} du = \frac{1}{a^2} (au - 1)e^{au} + C$$

$$97. \int u^n e^{au} du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du$$

$$98. \int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \sin bu - b \cos bu) + C$$

### Ejemplo

Resolver:

$$\int (x + 4) e^{10(x+4)} dx$$

## Ejemplos

Resolver:

$$1. \int 3\phi \operatorname{sen}^3(\phi^2 + 4) d\phi$$

$$2. \int \frac{\pi}{2z^2 - 7z} dz$$

$$3. \int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}} dx$$

$$4. \int e^{2v} \arctan(e^v) dv$$

[Introducción](#)

[Busqueda en tabla](#)

[Referencias](#)

## Busqueda en tabla

$$\int 3\phi \operatorname{sen}^3(\phi^2 + 4) d\phi.$$

$$69. \int \tan^3 u \, du = \frac{1}{2} \tan^2 u + \ln |\cos u| + C$$

$$70. \int \cot^3 u \, du = -\frac{1}{2} \cot^2 u - \ln |\operatorname{sen} u| + C$$

$$71. \int \sec^3 u \, du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln |\sec u + \tan u| + C$$

$$72. \int \csc^3 u \, du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln |\csc u - \cot u| + C$$

$$73. \int \operatorname{sen}^n u \, du = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \, du$$

$$74. \int \cos^n u \, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du$$

$$75. \int \tan^n u \, du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u \, du$$

$$81. \int \operatorname{sen} au \cos bu \, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$82. \int u \operatorname{sen} u \, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$$

$$83. \int u \cos u \, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$$

$$84. \int u^n \operatorname{sen} u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$$

$$85. \int u^n \cos u \, du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u \, du$$

$$86. \int \operatorname{sen}^n u \cos^m u \, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u \, du \\ = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u \, du$$

## Busqueda en tabla

$$\int \frac{\pi}{2z^2 - 7z} dz.$$

### Formas que involucran $a + bu$

$$47. \int \frac{u du}{a + bu} = \frac{1}{b^2} (a + bu - a \ln |a + bu|) + C$$

$$48. \int \frac{u^2 du}{a + bu} = \frac{1}{2b^3} [(a + bu)^2 - 4a(a + bu) + 2a^2 \ln |a + bu|] + C$$

$$49. \int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$$

$$50. \int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a + bu}{u} \right| + C$$

$$51. \int \frac{u du}{(a + bu)^2} = \frac{a}{b^2(a + bu)} + \frac{1}{b^2} \ln |a + bu| + C$$

$$52. \int \frac{du}{u(a + bu)^2} = \frac{1}{a(a + bu)} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{a + bu}{u} \right| + C$$

$$53. \int \frac{u^2 du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3} \left( a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a \ln |a + bu| \right) + C$$

## Busqueda en tabla

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}} dx.$$

**Formas que involucran  $\sqrt{a^2 - u^2}$ ,  $a > 0$**

$$30. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$31. \int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$32. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$33. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\frac{1}{u} \sqrt{a^2 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$34. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$35. \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$36. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2 u} \sqrt{a^2 - u^2} + C$$

## Busqueda en tabla

$$\int e^{2v} \arctan(e^v) dv.$$

### Formas trigonométricas inversas

$$87. \int \operatorname{sen}^{-1} u \, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$$

$$88. \int \operatorname{cos}^{-1} u \, du = u \operatorname{cos}^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$$

$$89. \int \tan^{-1} u \, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C$$

$$90. \int u \operatorname{sen}^{-1} u \, du = \frac{2u^2-1}{4} \operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$$

$$91. \int u \operatorname{cos}^{-1} u \, du = \frac{2u^2-1}{4} \operatorname{cos}^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$$

$$92. \int u \tan^{-1} u \, du = \frac{u^2+1}{2} \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$$

$$93. \int u^n \operatorname{sen}^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[ u^{n+1} \operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \quad n \neq -1$$

$$94. \int u^n \operatorname{cos}^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[ u^{n+1} \operatorname{cos}^{-1} u + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \quad n \neq -1$$

$$95. \int u^n \tan^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[ u^{n+1} \tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{1+u^2} \right], \quad n \neq -1$$

## Ejemplos

Resolver:

1.  $\int e^{5x} \cos(2x) dx$

2.  $\int \sin \theta \cos \theta d\theta$

## Busqueda en tabla

$$\int e^{5x} \cos(2x) dx.$$

### Formas exponenciales y logarítmicas

$$96. \int u e^{au} du = \frac{1}{a^2} (au - 1)e^{au} + C$$

$$97. \int u^n e^{au} du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du$$

$$98. \int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \sin bu - b \cos bu) + C$$

$$99. \int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \cos bu + b \sin bu) + C$$

$$100. \int \ln u du = u \ln u - u + C$$

$$101. \int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C$$

$$102. \int \frac{1}{u \ln u} du = \ln |\ln u| + C$$

## Busqueda en tabla

$$\int \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta$$

$$69. \int \tan^3 u \, du = \frac{1}{2} \tan^2 u + \ln |\cos u| + C$$

$$70. \int \cot^3 u \, du = -\frac{1}{2} \cot^2 u - \ln |\operatorname{sen} u| + C$$

$$71. \int \sec^3 u \, du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln |\sec u + \tan u| + C$$

$$72. \int \csc^3 u \, du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln |\csc u - \cot u| + C$$

$$73. \int \operatorname{sen}^n u \, du = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \, du$$

$$74. \int \cos^n u \, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du$$

$$75. \int \tan^n u \, du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u \, du$$

$$81. \int \operatorname{sen} au \cos bu \, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$82. \int u \operatorname{sen} u \, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$$

$$83. \int u \cos u \, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$$

$$84. \int u^n \operatorname{sen} u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$$

$$85. \int u^n \cos u \, du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u \, du$$

$$86. \int \operatorname{sen}^n u \cos^m u \, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u \, du \\ = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u \, du$$

## Referencias

Stewart, J., 2012. Cálculo de varias variables trascendentes tempranas, 7ma edición. Cengage Learning Editores.