Facultad de Ingeniería UNER

Álgebra y Cálculo

Tecnicatura universitaria en procesamiento y explotación de datos

TUPED - 1° C

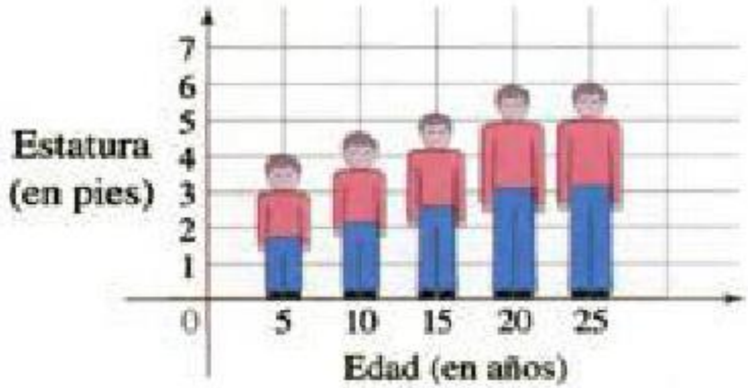
Facultad de
UNER Ingeniería

Unidad 1: Funciones de variable real

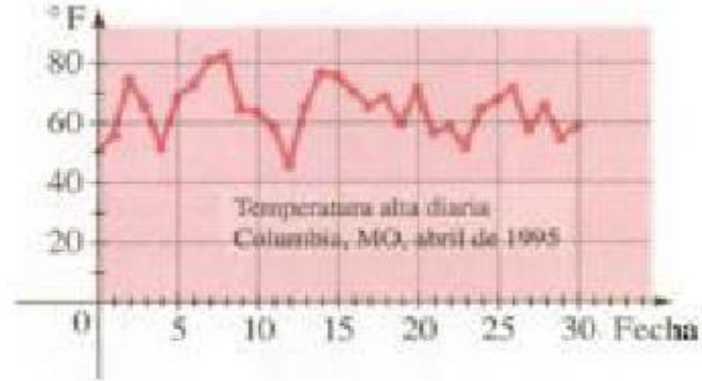
Función Lineal

TUPED - 1° C

Funciones en nuestro entorno



La estatura es una función de la edad.



La temperatura es una función de la fecha.

EDAD → ESTATURA

15 años → 1,60 metros

La estatura de una persona depende de la edad

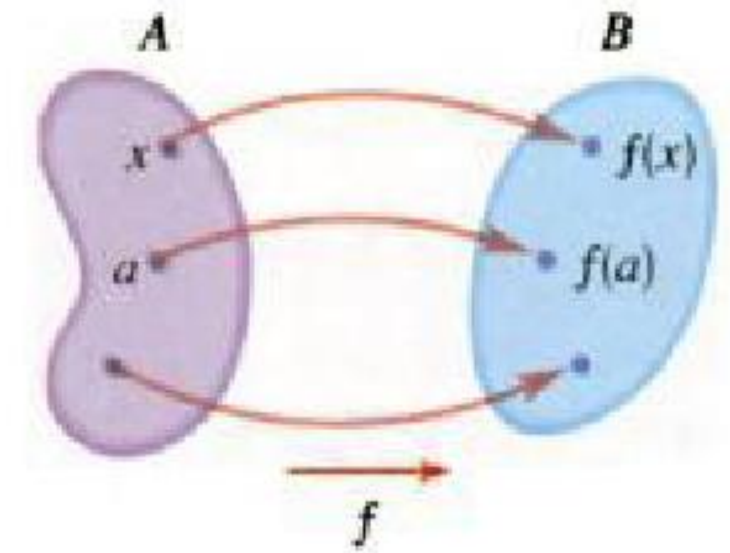
¿Una persona puede tener dos alturas distintas a una determinada edad?

A **cada elemento del primer conjunto** le corresponde **un único elemento** del segundo

Definición de una función

Definición de función

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, en un conjunto B.



f(x), se lee:
"f de x"

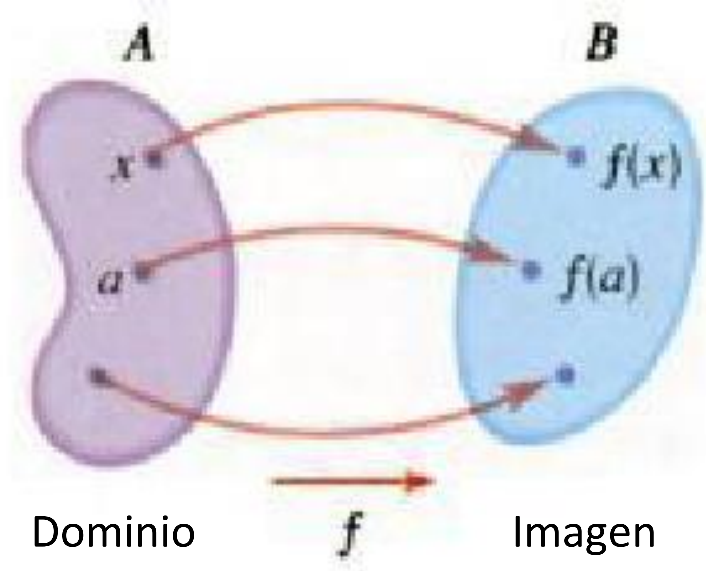
EDAD

ALTURA

x:variable **independiente**
y:variable **dependiente**

$x \rightarrow y=f(x)$

Dominio e Imagen de una función



Dominio Imagen

Conjunto de las entradas posibles

Conjunto de las salidas posibles

Dominio

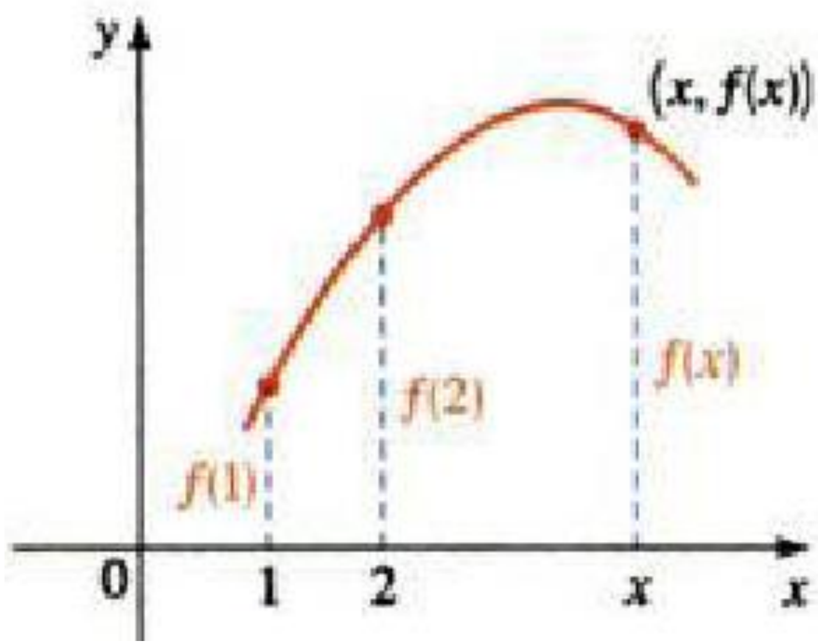
Imagen

La gráfica de una función

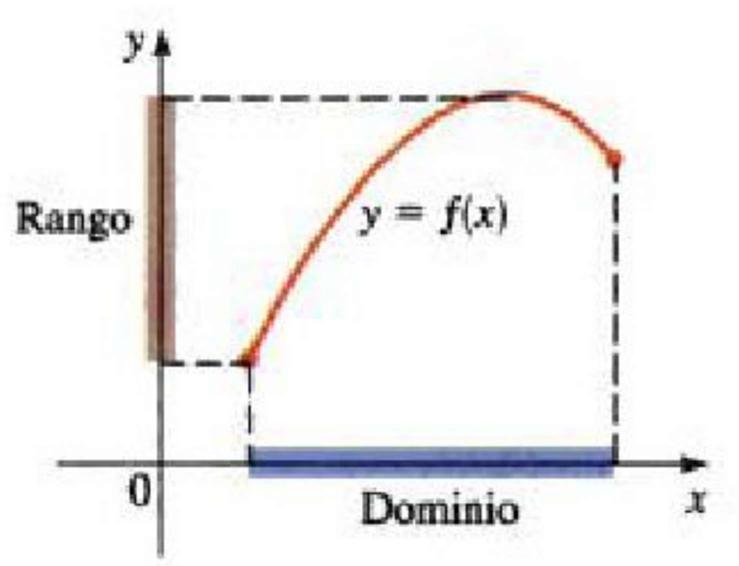
Si f es una función con dominio A, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; es decir, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.



Dominio e imagen



Se llama **dominio** de una función al conjunto de **valores de la variable independiente**, ***x***, **para los que existe la función**, es decir para los que existe un valor de la variable dependiente, ***y***.

Se llama **Rango o imagen** de una función a todos los **valores de la variable dependiente *y*** asociados a algún valor de la variable independiente ***x***. Los mismos se obtienen al aplicar la función a los elementos del dominio.

f: x → y

Representación de una función

- Verbal: por medio de una descripción con palabras (lenguaje coloquial)
- Numérica: por medio de una tabla de valores
- Algebraica: por medio de una fórmula matemática
- Visual o gráfica: por medio de una gráfica

Representación de una función

Cuatro formas de representar una función

Verbal

Con palabras:

$P(t)$ es la "población del mundo en el instante t"

Relación de la población P y el tiempo t

Algebraica

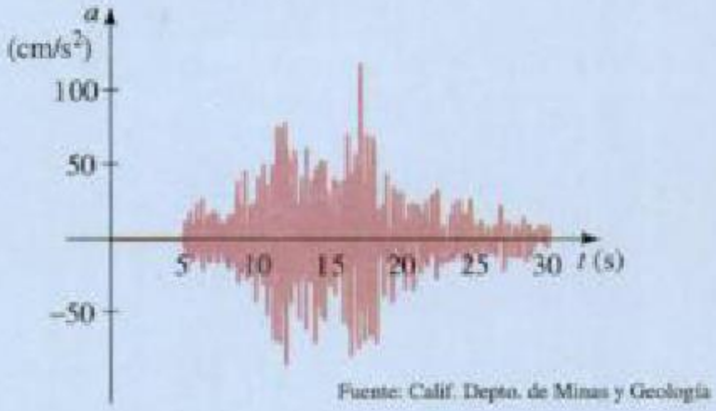
Por medio de una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual

Por medio de una gráfica:



Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Por medio de una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.37
$1 < w \leq 2$	0.60
$2 < w \leq 3$	0.83
$3 < w \leq 4$	1.06
$4 < w \leq 5$	1.29
$\vdots$	$\vdots$

Costo de enviar una carta por correo de primera clase

Representación gráfica

Tiene como objetivo analizar el comportamiento de una función, $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y}$

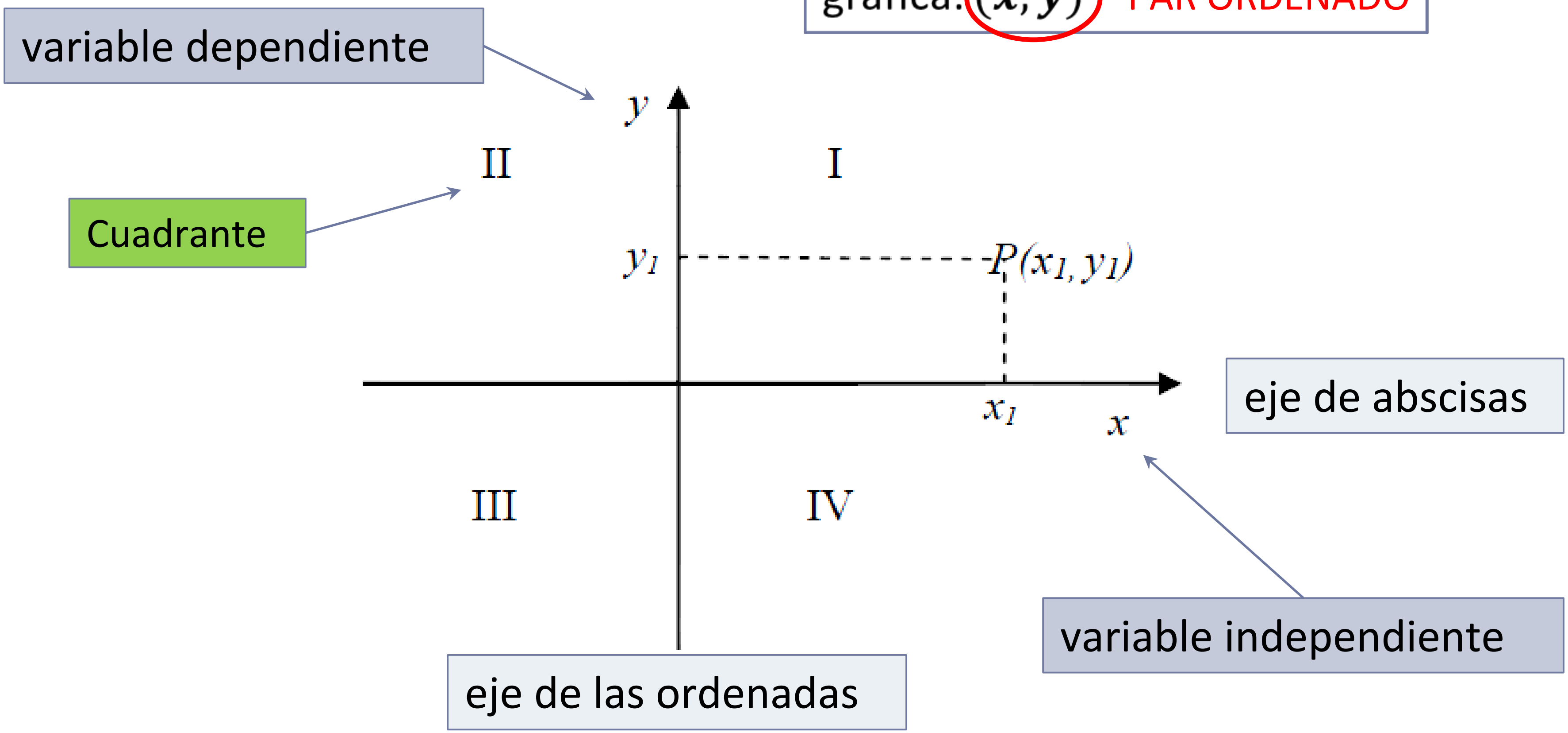
Se representa a la función de manera gráfica utilizando el sistema de ejes cartesianos.

El **eje de abscisas (*eje X*) representa a** la variable independiente y el de **ordenadas (*eje Y*) a la variable** dependiente.

Las **coordenadas** de cada punto sobre en la gráfica son $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$.

Plano cartesiano

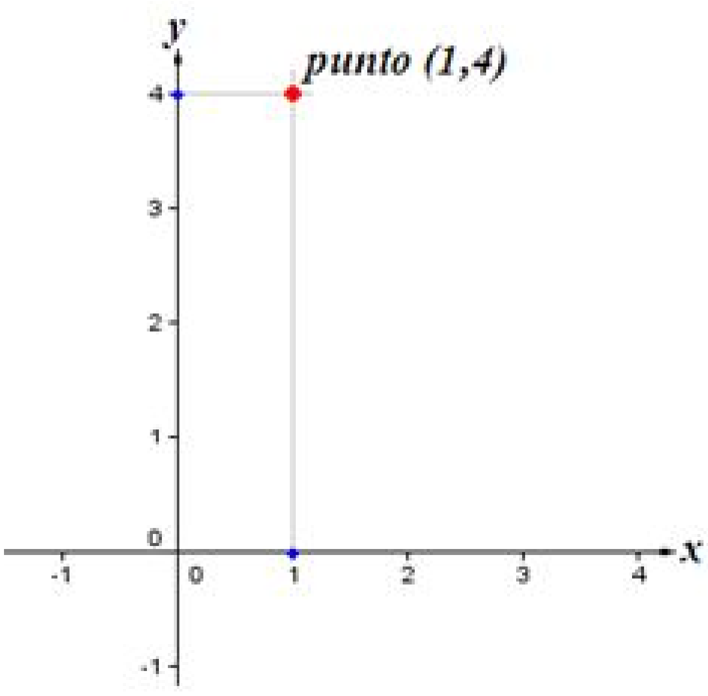
siendo las coordenadas de cada punto de la gráfica: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ PAR ORDENADO



Ejemplo 1:

Dada la siguiente igualdad: $y = 3x + 1$

Represente el punto $P_0(x_0, y_0)$ en el plano coordenado cuando $x_0 = 1$.



¿Qué ocurre con el comportamiento de la función cuando le asignamos más valores a la variable independiente?

Mediante una tabla, le damos a ***x*** varios valores y calculamos los valores correspondientes de ***y*** de acuerdo a la expresión algebraica de la función.

Dada:

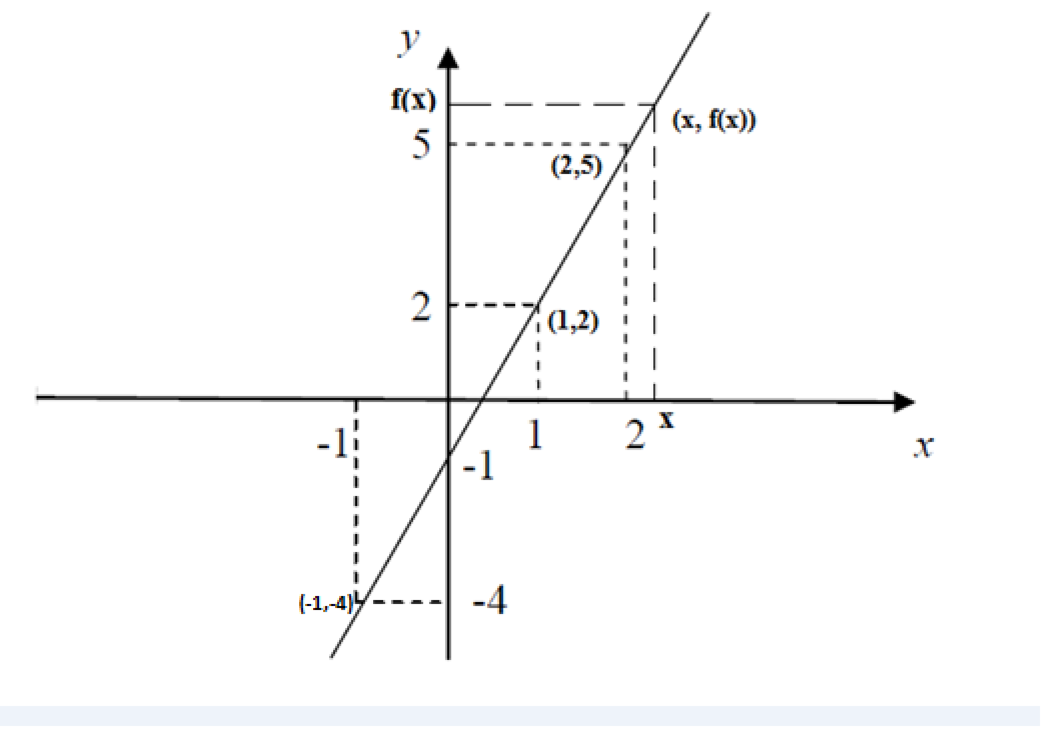
$y = 3x - 1$

Por ejemplo, para:

$x = -1$

$x = 1$

$x = 2$



Ejemplo 2:

Sea la siguiente función:

$$y = f(x) = 2x + 1$$

Armamos una tabla de valores:

Por ejemplo: para $x = 4$, $y = f(\mathbf{4}) = 2(4)+1 = 8 + 1 = \mathbf{9}$.

x	y=f(x) = 2x+1
4	9
6	13

Ubicando las valores de la tabla (PAR ORDENADO) en un plano coordenado y luego uniendo los puntos, se obtiene la gráfica de la función.

Ejemplo:

¿Cual es el dominio de la función $y = 3x - 1$?

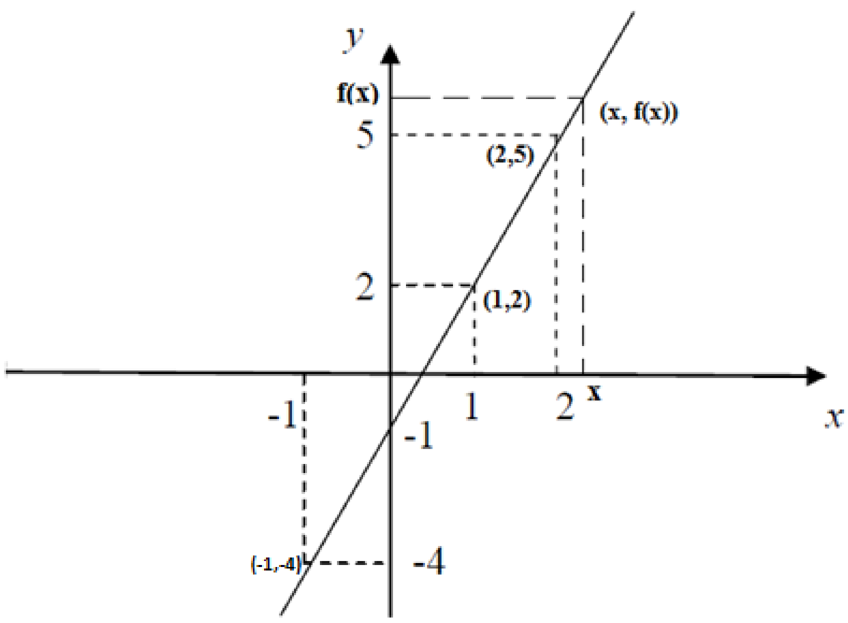
(¿Cuales son los valores que puede tomar la x?)

Como la variable x no tiene limitaciones, **el dominio de la función es el conjunto de todos los Reales.**

¿Y la imagen?

(¿Cuales son los valores que toma y para los diferentes valores de x?)

Analizamos la gráfica y concluimos que son también todos los Reales



Función lineal

Recordemos que un polinomio de primer grado está definido de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{P(x) = a\,x + b}$$

Veamos que si consideramos a $P(x)$ como una variable dependiente de la variable *x*, estamos en presencia de una **función polinómica.**

Reescribiendo la función polinómica de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{y = ax + b}$$

Se denomina a ***y*** como una función lineal cuya representación gráfica corresponde a una recta.

Ejemplo:

1) Dada $f\,(x) = 4\,x + 2$

a) Encontrar algunas coordenadas de su gráfica.

b) Representar las coordenadas en un sistema de coordenadas ortogonales y definir a partir de los mismos la recta correspondiente.

c) A partir de los datos de la tabla de valores encuentre las razones siguientes, y extraiga conclusiones:

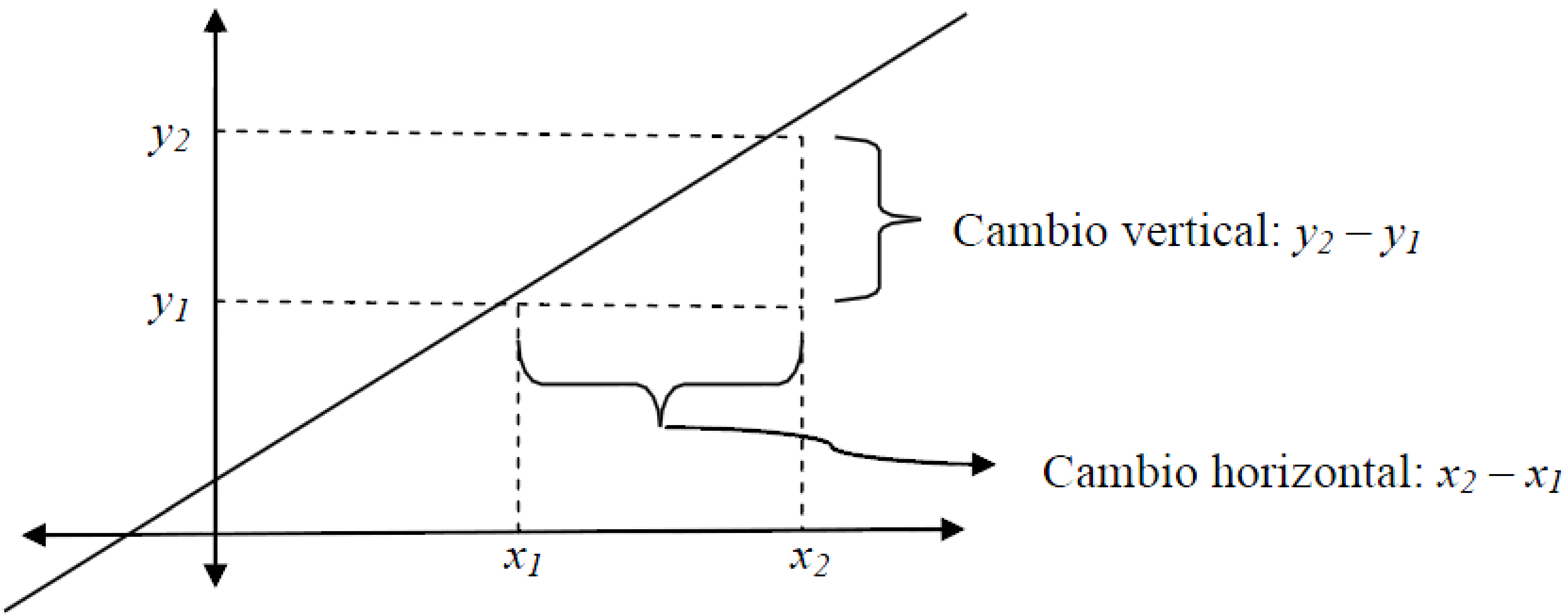
i) $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ii) $\dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$ iii) $\dfrac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}$

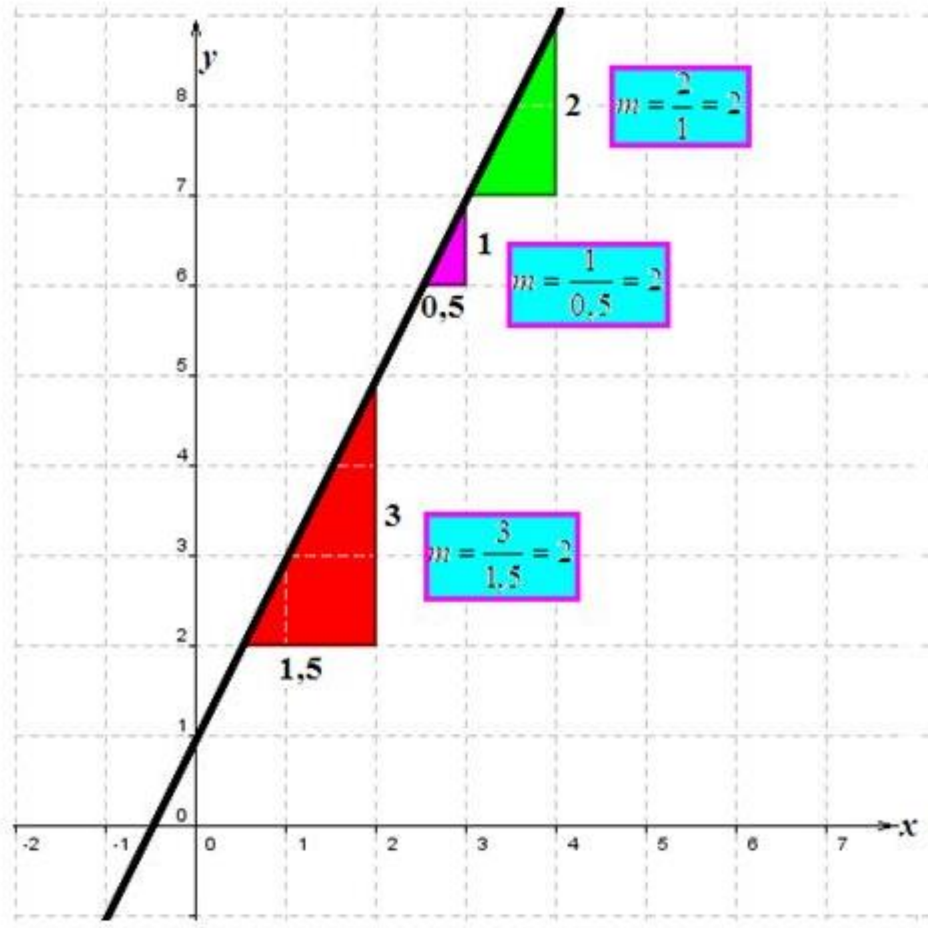
iv) $\dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ v) $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ vii) $\dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$

viii) $\dfrac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4}$

Pendiente de una recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{cambio en } y \text{ (cambio vertical)}}{\text{cambio en } x \text{ (cambio horizontal)}}$$





y
x
2
1
0,5
3
1,5
$m = \frac{2}{1} = 2$
$m = \frac{1}{0,5} = 2$
$m = \frac{3}{1,5} = 2$
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Forma explícita de la ecuación de una recta:

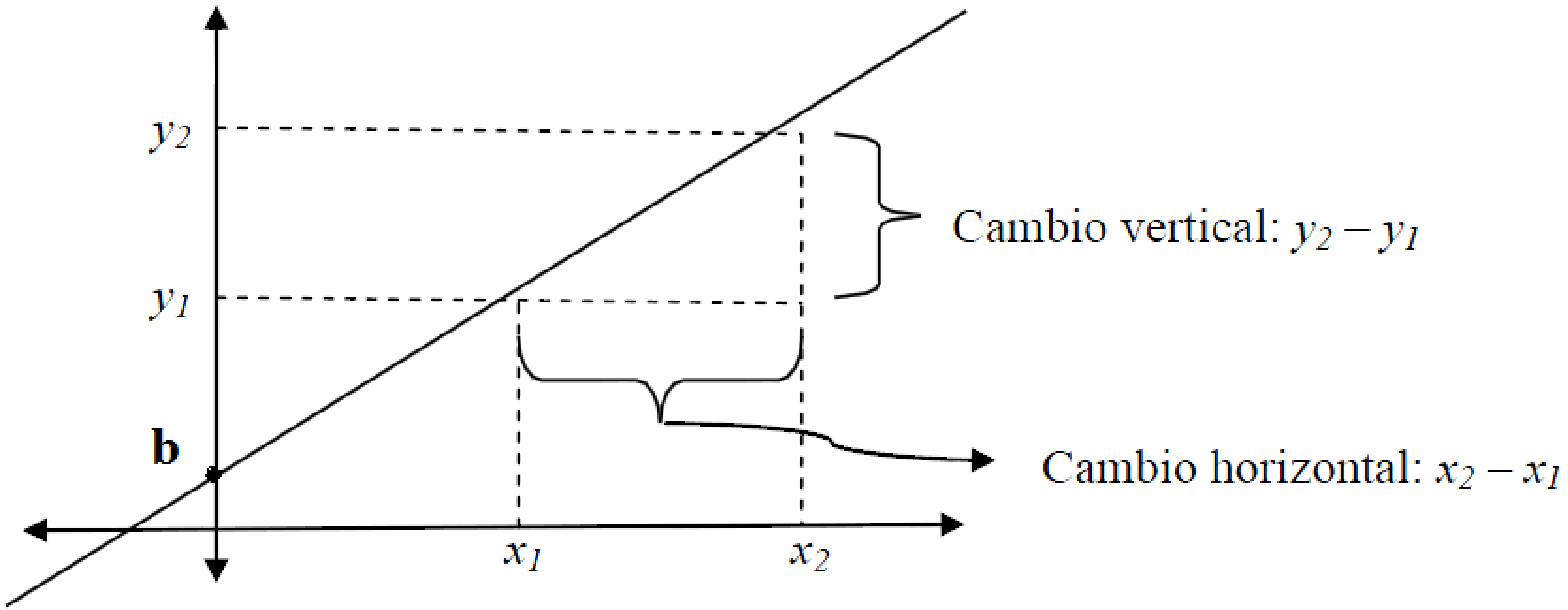
$$y = m\,x + b$$

Pendiente

Ordenada al origen

Ordenada al origen

Es el punto de intersección de la recta con el eje de ordenadas.



Forma punto pendiente

Conociendo el valor de la pendiente (*m)* y un punto $P_0(x_0, y_0)$perteneciente a la recta, podemos encontrar la ecuación de la misma de la siguiente manera:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

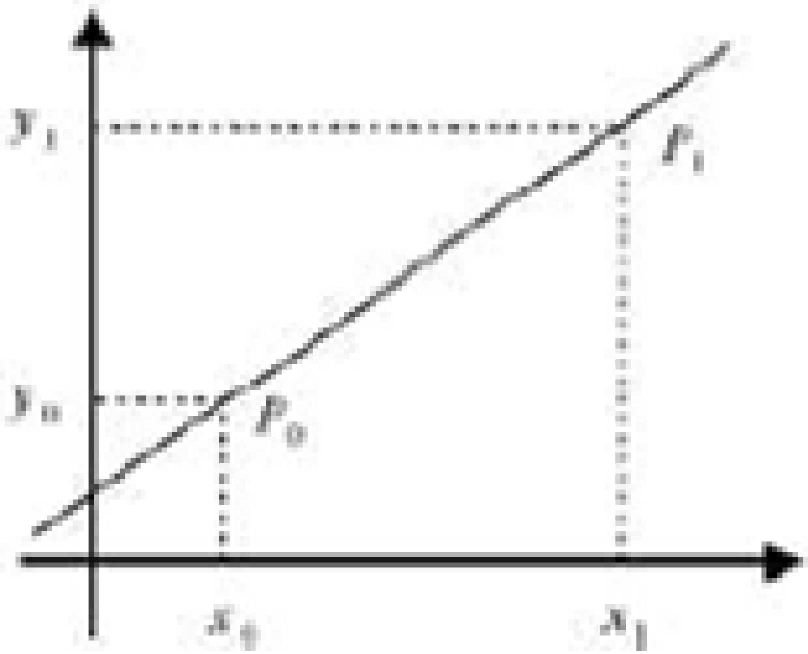
Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la recta de pendiente 4 y que pasa por el punto (-2,7).

La ecuación de la recta de pendiente 4 y que pasa por el punto $(-2\ ,\ 7)$ es

$$y - 7 = 4\,(x - (-2)) \quad ; \quad y - 7 = 4\,(x + 2)$$

Forma punto – punto:



$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Rectas paralelas y perpendiculares

- Dos rectas son **paralelas** si y sólo si tienen la misma pendiente.

Si $\boldsymbol{R_1}$: $\mathbf{y} = \boldsymbol{m_1 x + p}$ y $\boldsymbol{R_2}$:$\mathbf{y} = \boldsymbol{m_2 x + c}$

Entonces, R_1 y R_2 **son paralelas si** $\boldsymbol{m_1 = m_2}$

- Dos rectas son **perpendiculares** si y sólo si la pendiente de una es el opuesto del recíproco de la pendiente de la otra.

Si $\boldsymbol{R_1}$: $\mathbf{y} = \boldsymbol{m_1 x + p}$ y $\boldsymbol{R_2}$:$\mathbf{y} = \boldsymbol{m_2 x + c}$

Entonces, R_1 y R_2 **son perpendiculares si** $\boldsymbol{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$

Ejemplo:

1) Encuentre la ecuación de la recta que contiene al punto P_0 y es paralela a R:

- $P_0(-1,2)\ ;\ R: y = -3x + 1$

2) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P_0 y es perpendicular a R, con los datos del ejemplo anterior.