Facultad de
UNER Ingeniería

Álgebra y Cálculo

Tecnicatura universitaria en procesamiento y explotación de datos

TUPED - 1° C

Facultad de
UNER Ingeniería

Unidad 3:

Derivadas

TUPED - 1° C

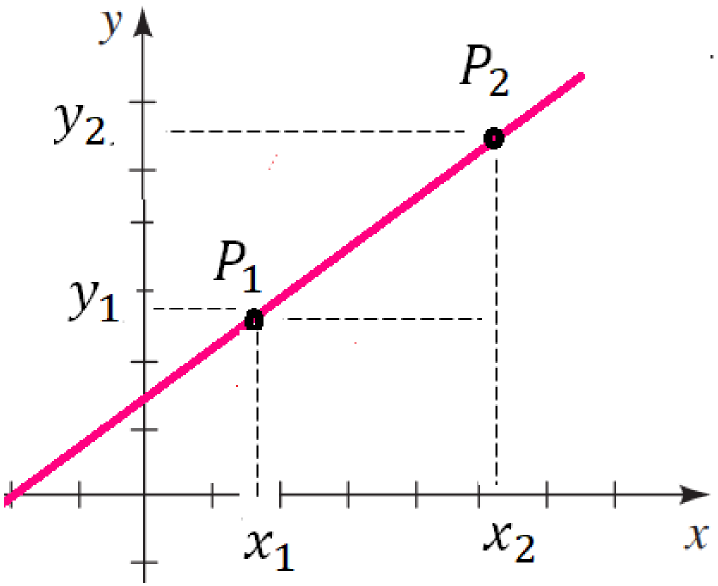
Introducción a derivadas

Dos problemas con el mismo tema

- Nuestro primer problema es muy antiguo; se remonta a la época del gran científico griego Arquímedes (287-212 A. C.) Nos referimos al problema de la *pendiente de la recta tangente*.

- Nuestro segundo problema es más reciente. Surgió con los intentos de Kepler (1571-1630), Galileo (1564-1642), Newton (1642-1727) y otros para describir la velocidad de un cuerpo en movimiento. Es el problema de la *velocidad instantánea*.

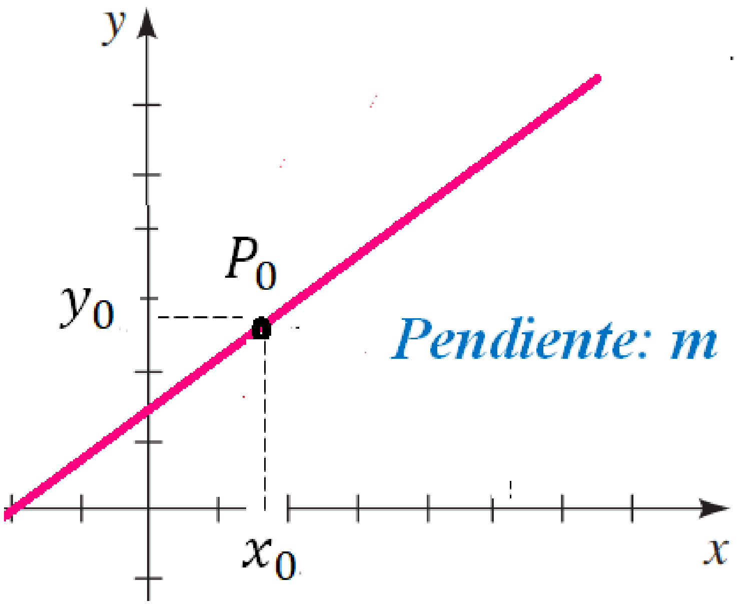
Repaso: recta en el plano



Definición: ***Pendiente de la recta***

La recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ tiene ***pendiente***

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

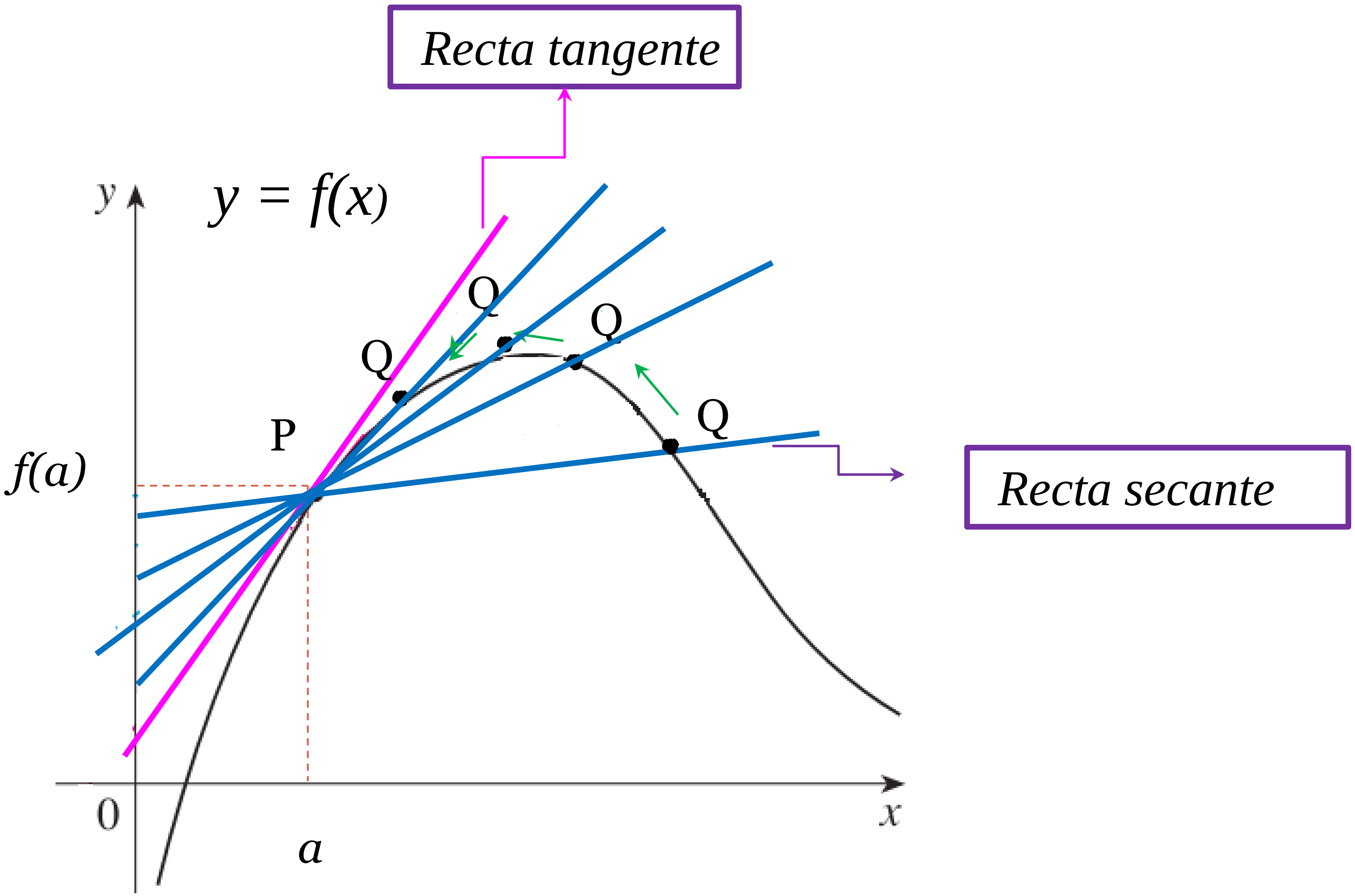


Definición: ***Ecuación de la recta***

Punto - Pendiente

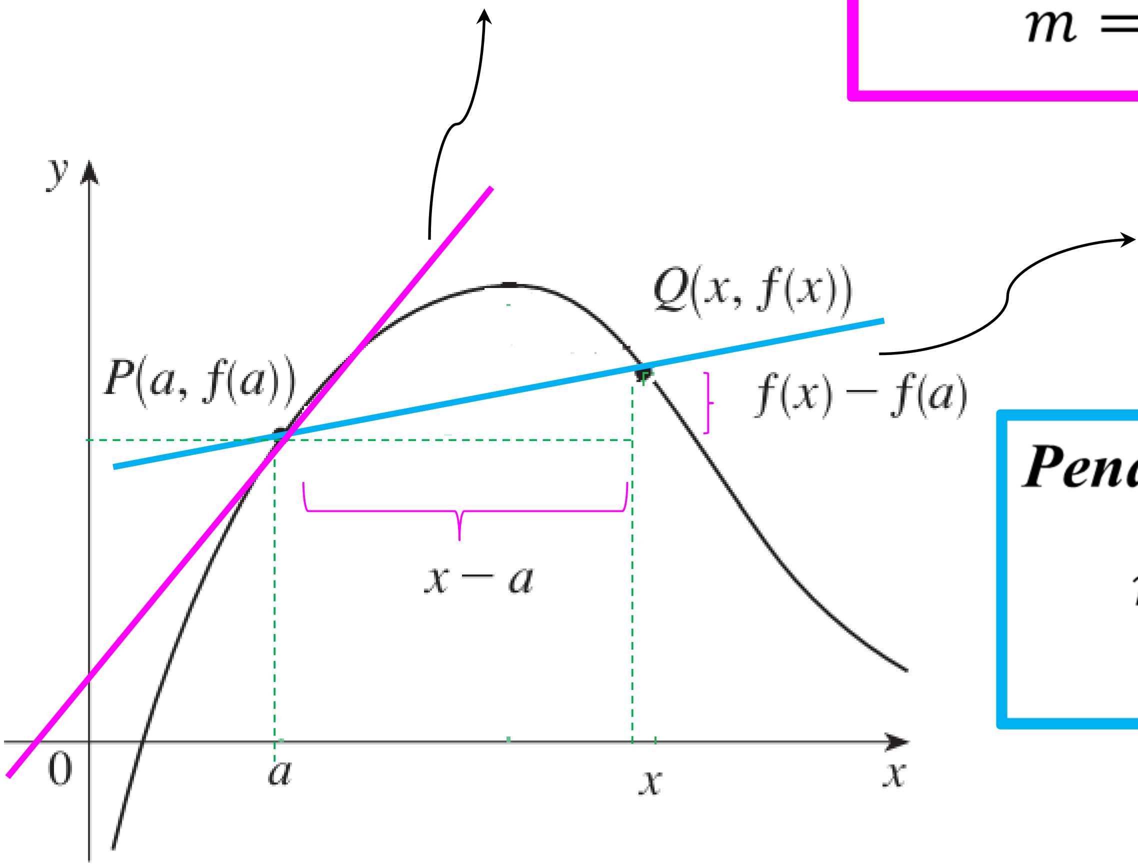
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Recta tangente



Recta tangente

Recta tangente



Recta secante

***Pendiente** de la recta tangente*

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

***Pendiente** de la recta secante*

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Recta tangente

Definición

La ***recta tangente*** a la curva *y*= *f(x)* en el punto P*(a,f(a))* ***es la recta que pasa por P con pendiente***

$$\boxed{m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

siempre que ese límite exista.

El problema de la velocidad

Problema Supongamos que una pelota se deja caer desde la plataforma superior de observación de la Torre CN en Toronto, a 450 m sobre el suelo. Encuentre la velocidad de la pelota después de 5 segundos.

Distancia de caída libre después de t segundos $s(t) = 4.9t^2$

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1}$$

$$= \frac{4.9(5.1)^2 - 4.9(5)^2}{0.1} = 49.49 \text{ m/s}$$

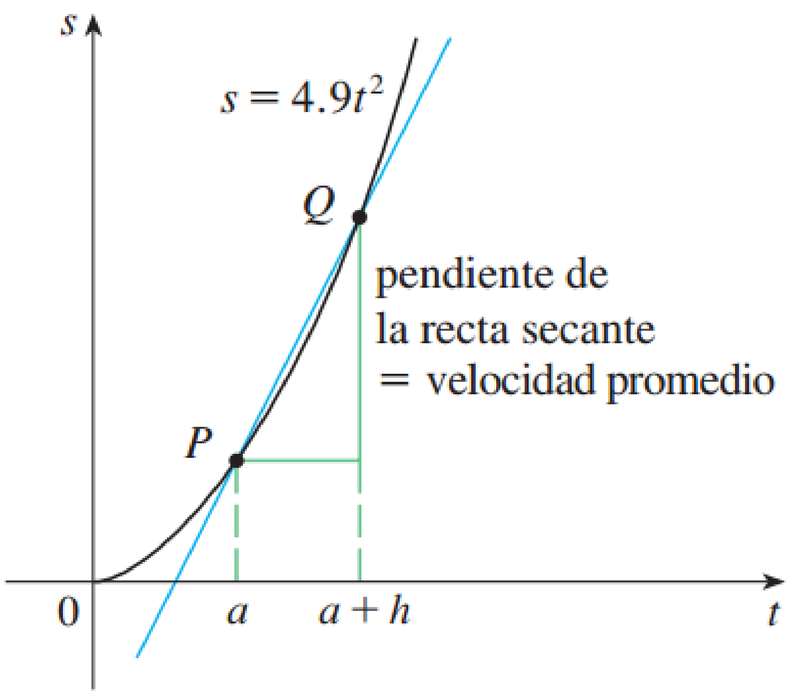
Intervalo de tiempo	Velocidad promedio (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53.9
$5 \leqslant t \leqslant 5.1$	49.49
$5 \leqslant t \leqslant 5.05$	49.245
$5 \leqslant t \leqslant 5.01$	49.049
$5 \leqslant t \leqslant 5.001$	49.0049

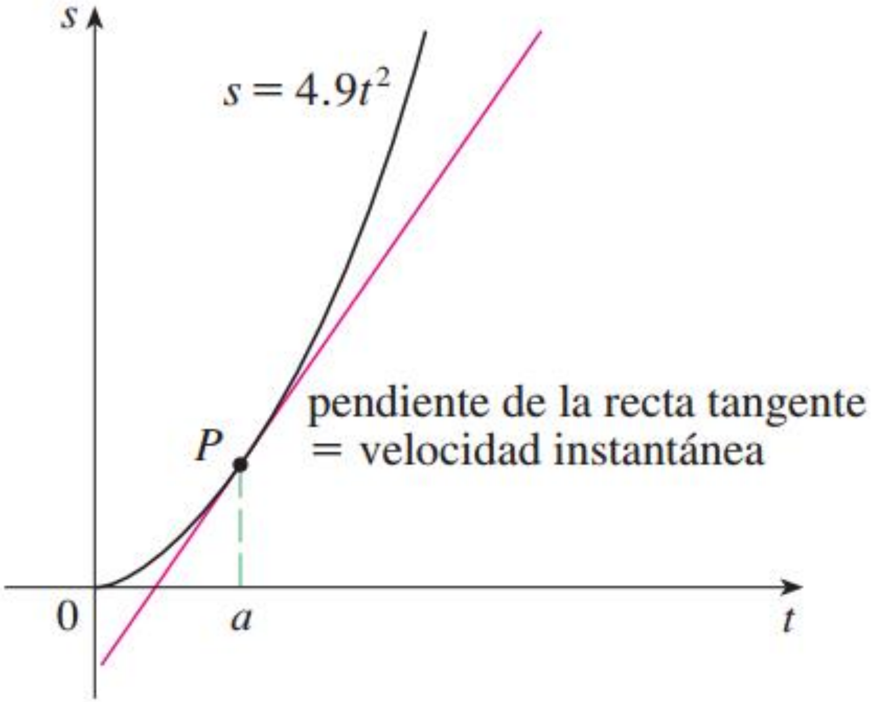
Velocidad instantánea

$$\boxed{v = 49 \text{ m/s}}$$

Problema de la velocidad instantánea

Si dibujamos la función distancia recorrida por la pelota





Pendiente de la recta secante

Pendiente de la recta tangente

$$m_{pq} = \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h} = v(a)$$

Velocidad media en el intervalo $[a, a+h]$

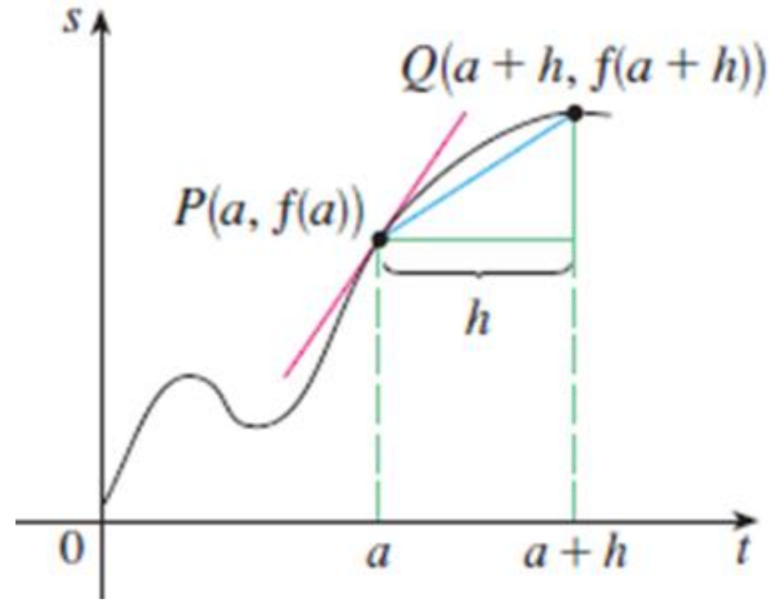
Velocidad en el instante $t=a$

Velocidad promedio - Velocidad instantánea

Si un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, la ecuación del movimiento es

$$s = f(t) \quad \textit{\textbf{función posición}}$$

donde ***s***: desplazamiento del objeto respecto al origen y ***t:*** tiempo



Velocidad promedio en el intervalo de tiempo [a, a+h]

$$\boxed{\textit{velocidad promedio} = \frac{\textit{desplazamiento}}{\textit{tiempo}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

La velocidad o velocidad instantánea v(a) en el instante t = a

$$\boxed{v(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Derivada de una función: definición

La ***derivada*** *de una función f en un número x = a*, denotada por *f ′(a)*, es

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

si este límite existe.

Si reemplazamos a por la variable x:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Derivada de *f*

Observación: la derivada de $f(x)$ puede denotarse como: $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$

Derivada - Pendiente – Razón de cambio

Derivada de f en a

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Pendiente de la recta tangente en $x = a$

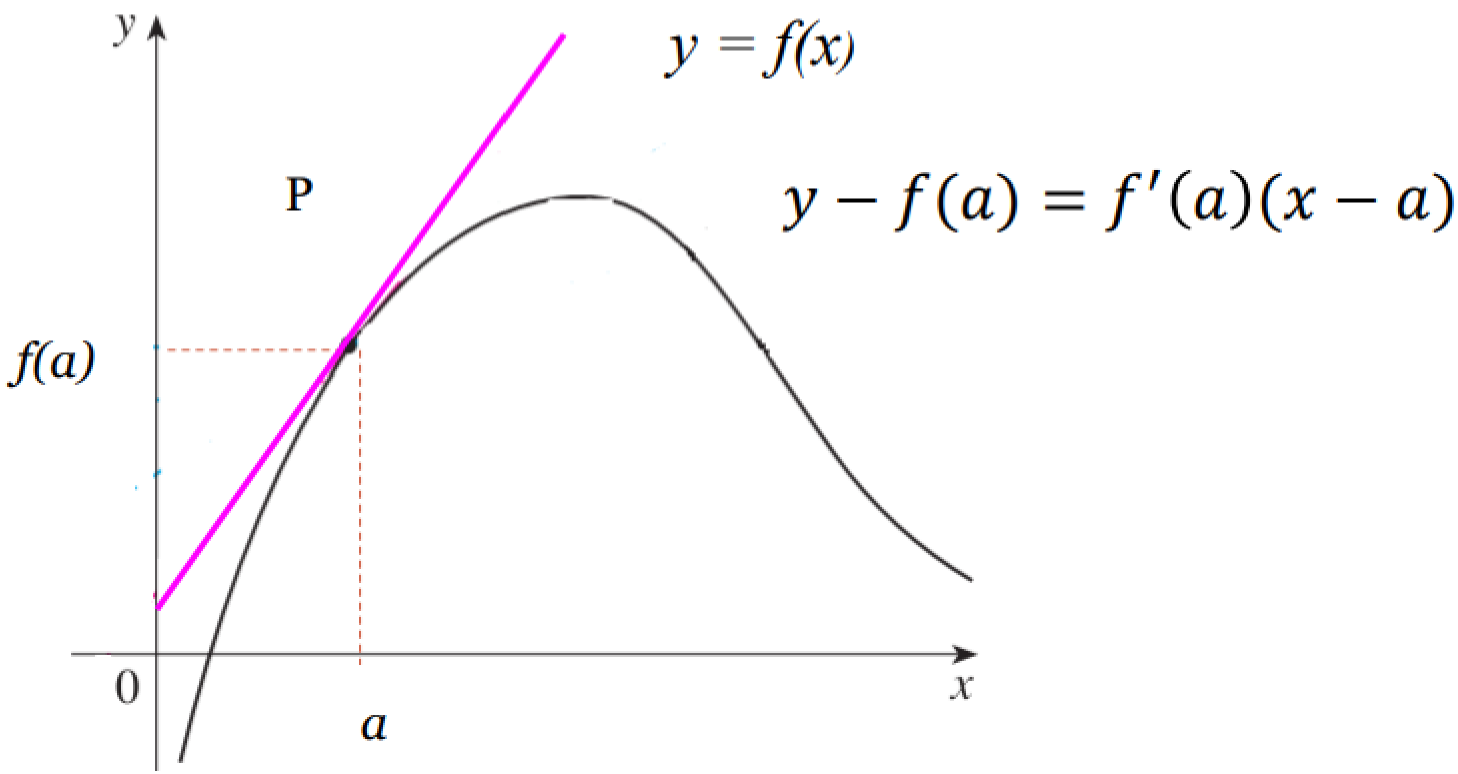
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Razón de cambio instantánea en $t = a$

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada y recta tangente

La recta tangente a $y = f(x)$ en $\left(a, f(a)\right)$ es la recta que pasa por $\left(a, f(a)\right)$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, es decir, a la derivada de f en $x = a$.



Derivabilidad en un intervalo:

Definición

Una función f es ***derivable en $x = a$*** si $f'(a)$ existe. Es ***derivable sobre un intervalo abierto*** *(a,b) si es derivable en todo número del intervalo.*

Derivabilidad - Continuidad

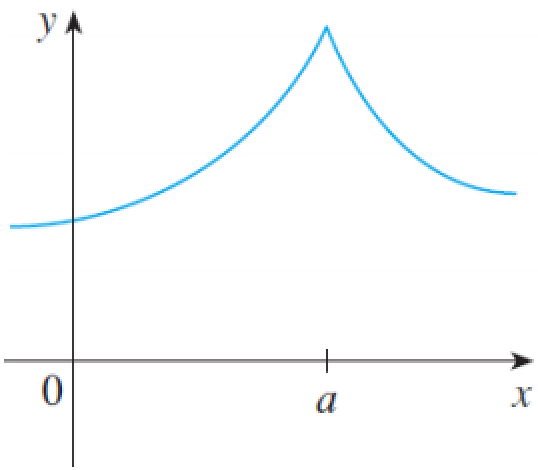
Teorema:

$$\text{Si } f \text{ es } \underbrace{\textbf{derivable en } x = a}_{\text{Hipótesis}} \text{, } \textit{entonces } \underbrace{f \textbf{ es continua en } x = a}_{\text{Tesis}}$$

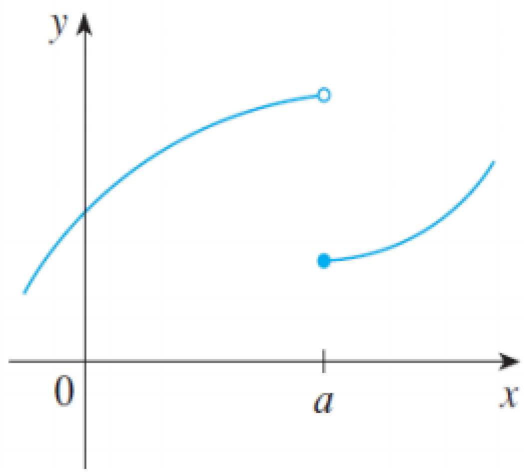
Derivabilidad $\Rightarrow$ ***Continuidad***

Continuidad $\not\Rightarrow$ ***Derivabilidad***

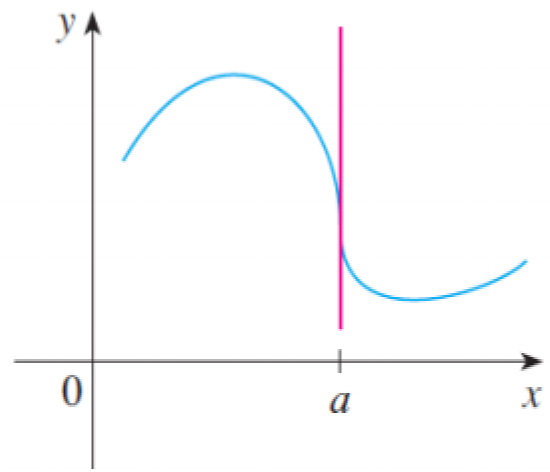
¿Dónde cada función <u>NO</u> es derivable?



Una esquina o pico



Una discontinuidad



Una tangente vertical

Reglas de derivación:

Derivada de una función constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Regla de la potencia Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Regla de la potencia (versión general) Si n es cualquier número real , entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Reglas de derivación:

Derivada de la función exponencial

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Derivada de la función exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Derivada de la función logaritmo

$$\frac{d}{dx}(log_a(x)) = \frac{1}{x \ln a}$$

Derivada de la función logaritmo natural

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

Reglas de derivación:

Regla del múltiplo constante Si c es una constante y f es una función derivable, *entonces*

$$\frac{d}{dx}[c\, f(x)] = c\,\frac{d}{dx}\, f(x)$$

Regla de la suma Si f y g son derivables , entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

Regla de la resta Si f y g son derivables , entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

Reglas de derivación:

Regla del producto Si f y g son derivables , entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Regla del cociente Si f y g son derivables , entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Tabla reglas de derivación

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'$$

$$(f.g)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

Halle la derivada de las siguientes funciones:

- $f(x) = \pi^2$
- $f(x) = -3x$
- $f(x) = 2x^2 - 1$
- $f(x) = \sqrt{x} + 5x$
- $f(x) = 3e^x - \frac{1}{2}x$
- $f(x) = 2(x-1)^2$
- $f(x) = \ln(x) . 2x$
- $f(x) = \frac{x+3}{3x}$

Calculemos la derivada de la siguiente función:

- $f(x) = (3x + 5)^2$

Una opción es reescribir la función como producto y aplicar propiedad distributiva. Luego derivar cada término del cuatrinomio resultante…

Otra opción es dejarlo expresado como producto para luego aplicar la Regla del Producto.

Pero ¿qué pasa si el exponente es mayor, por ejemplo: 5?

Regla de la cadena

Las funciones de la forma:

$$y = f\left(g(x)\right)$$

se denominan funciones compuestas.

Para derivar este tipo de funciones, podemos considerar a la función f (función exterior) en términos de una expresión general u (función interior):

$$y = f(u)$$

y a u en términos de la variable x:

$$u = g(x)$$

Regla de la cadena

Función exterior

$$y = f(g(x)) = f(u) \Rightarrow \boxed{y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Función interior

$$y' = f'(u).u'$$

La derivada de $y = f\big(g(x)\big)$ es el producto de la derivada de la función exterior por la derivada de la función interior.

Ejemplo:

Calcule la derivada de $y = (3x+5)^2$

Tenemos:

$u = g(x) = 3x + 5$ (función "interior")

$f(g(x)) = f(u) = u^2$ (función "exterior")

Por definición de regla de la cadena:

$y' = f'(u).u'$

$f'(u) = 2u$
$u' = 3$

Finalmente reemplazamos obteniendo la derivada de y:
$y' = 2(3x+5).3 = 6(3x+5)$

Halle $f'(x)$ aplicando Regla de la Cadena

- $f(x) = \ln(x-5)$
- $f(x) = (x^2+2x-1)^5$
- $f(x) = \sqrt{x^3+3}$
- $f(x) = e^{3-2x} - \frac{1}{2}x$
- $f(x) = e^{-2x}.5x$