UNER Facultad de Ingeniería

Álgebra y Cálculo

Tecnicatura universitaria en producción y explotación de datos

TUPED - 1° C

UNER Facultad de Ingeniería

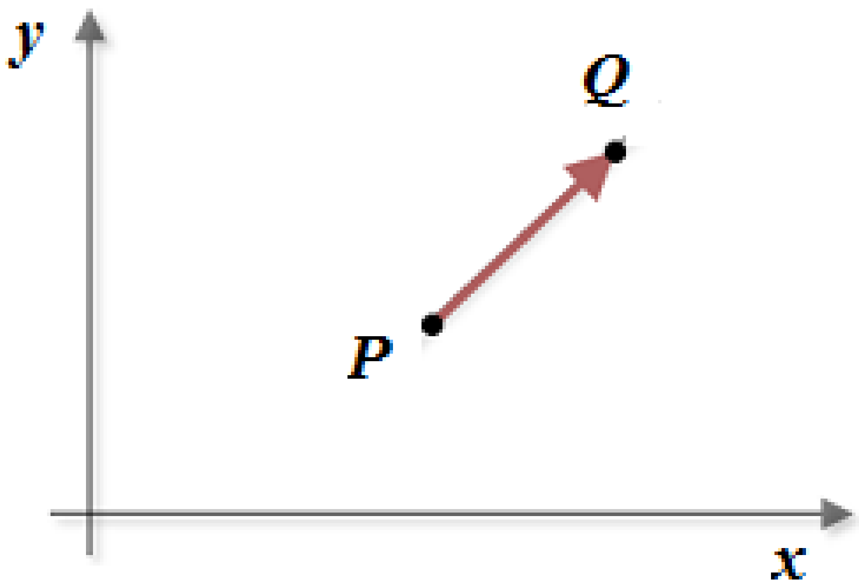
Unidad 6:

Vectores en el plano

TUPED - 1° C

Vectores en el plano

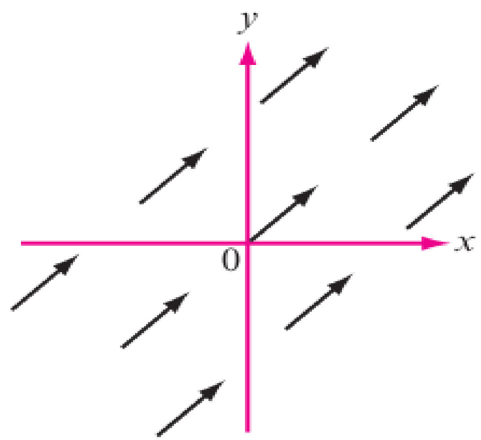
Sea P y Q dos puntos en el plano. El ***segmento dirigido*** de P a Q, denotado por $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento de recta que va de P a Q.



P ***punto inicial***
Q ***punto final***

- ***Definición geométrica de un vector***
  El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama ***vector***. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina ***representación*** del vector.

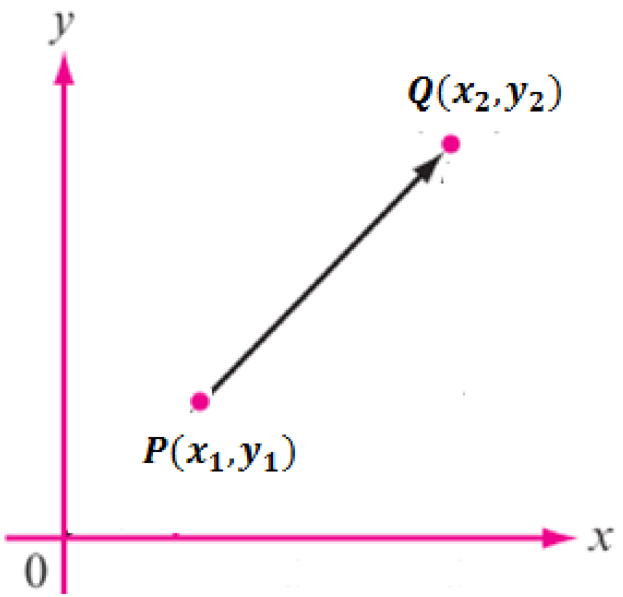
- ***Definición algebraica de un vector***
  Un ***vector*** en el plano ***xy*** es un par ordenado de números reales ***(a, b).*** Los números a y b se denominan ***elementos*** o ***componentes*** del vector **v**.



Vectores en el plano

Componentes de un vector:

Las componentes del vector ***son las coordenadas del extremo menos las coordenadas del inicio.***

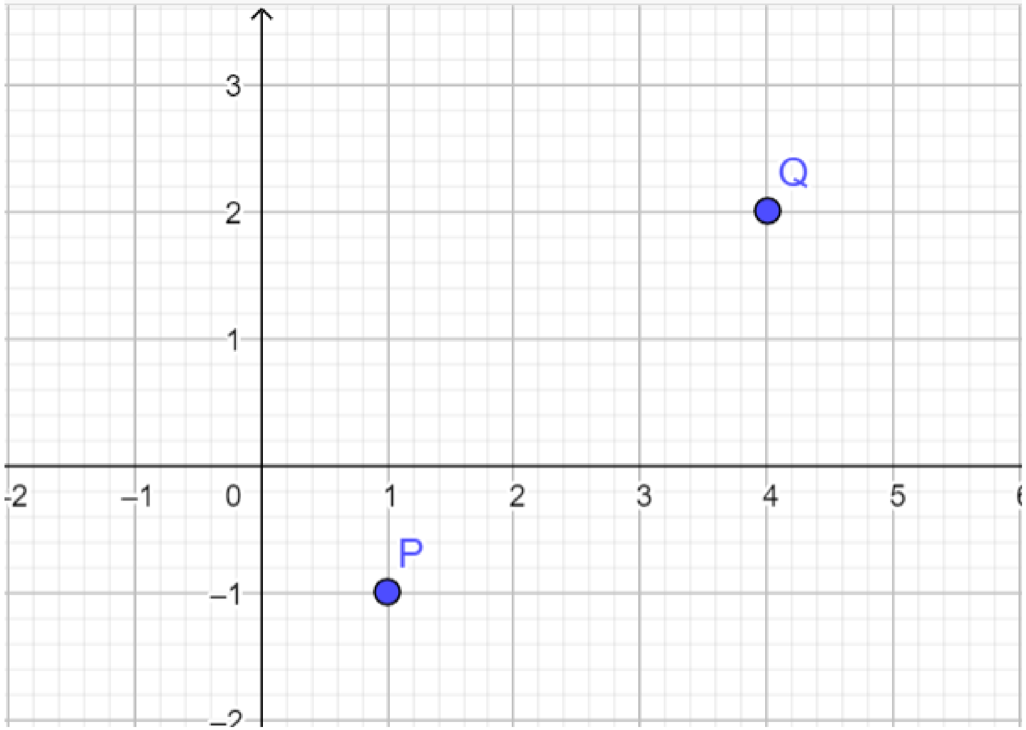


$$\boxed{\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$

Vectores en el plano

Componentes de un vector

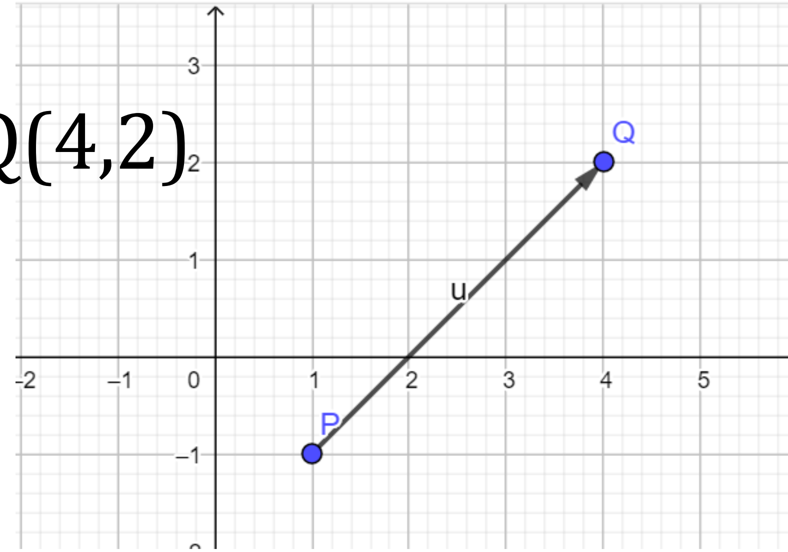
Ejemplo: Dados los Puntos P(1,-1) y Q(4,2)



Vectores en el plano

Componentes de un vector

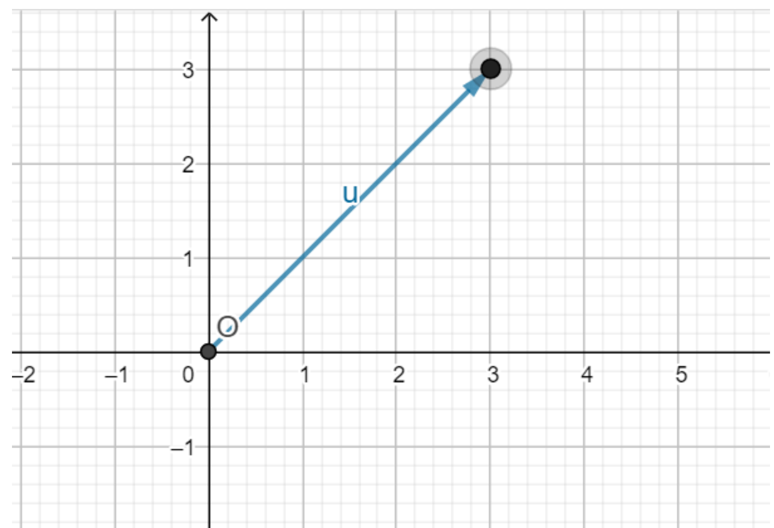
Dados los Puntos P(1,-1) y Q(4,2)



$$\overrightarrow{PQ} = \left(4-1, 2-(-1)\right) = (3,3)$$

Sea $\vec{u} = (3,3)$

Otra representación del vector $\vec{u}$

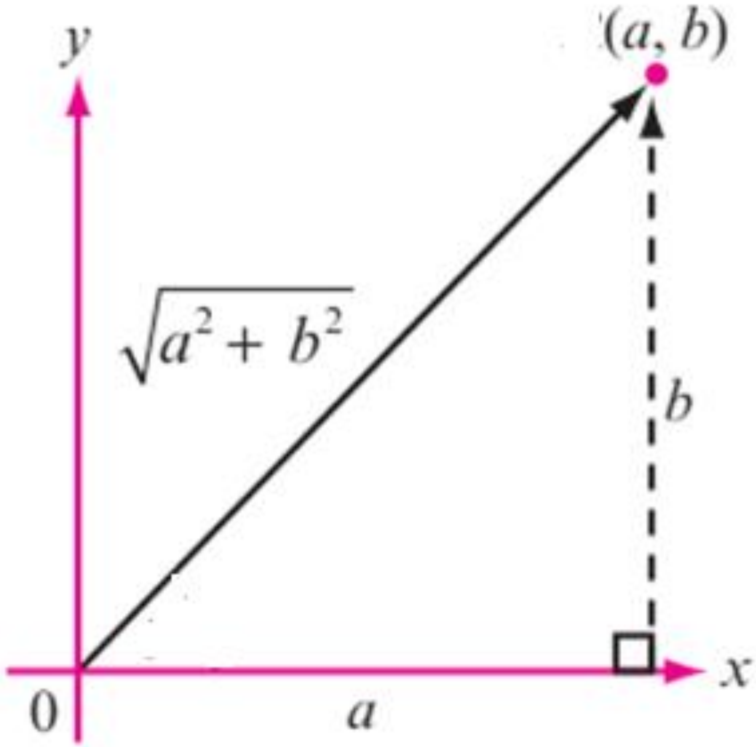


punto inicial: ***origen de coordenadas (0,0)***
punto final : ***punto R(3,3)***

Vectores en el plano

Magnitud de un vector: (Aplicamos teorema de Pitágoras)

Sea $\vec{\boldsymbol{v}} = (a,b)$



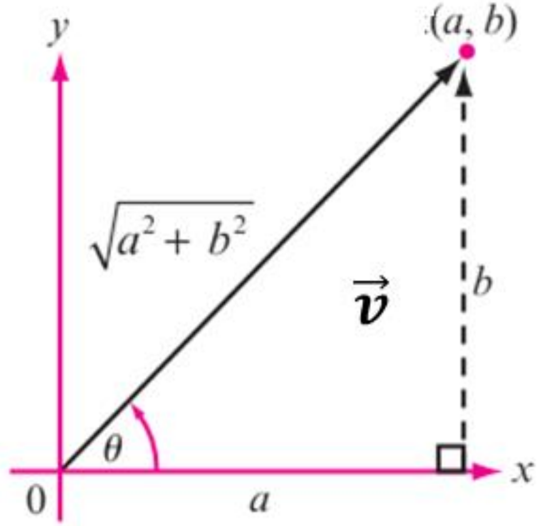
$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

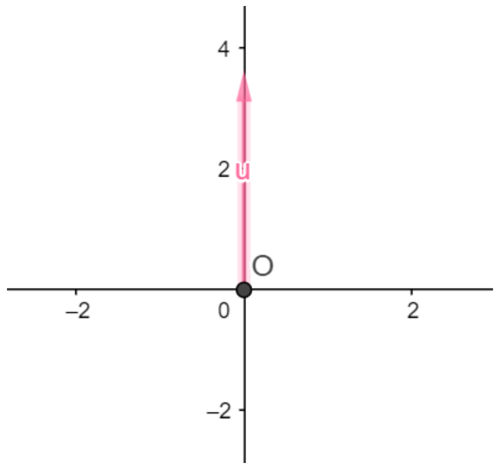
Vectores en el plano

Dirección de un vector:

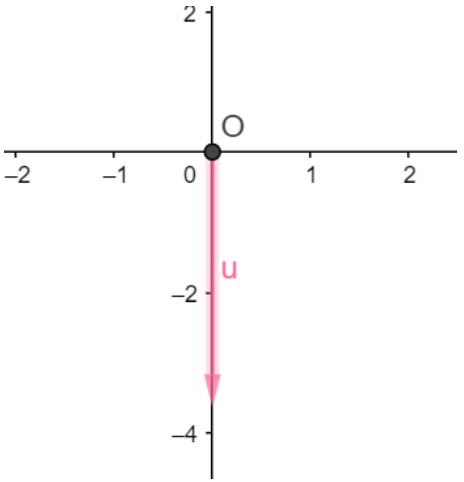
Sea $\vec{v} = (a,b)$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$





Si $a = 0$



$$dirección\ de\ (0,b) = \frac{\pi}{2}$$

$$dirección\ de\ (0,-b) = \frac{3\pi}{2}$$

Vectores en el plano - Operaciones

Producto por un escalar

$$k\vec{v}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

- ***Magnitud de*** $k\vec{v}$

  Multiplicar un vector por un escalar diferente de cero tiene el efecto de multiplicar la longitud del vector por el valor absoluto de ese escalar.

- ***Dirección de*** $k\vec{v}$

  Dirección de $k\vec{v}$ = dirección de $\vec{v}$, si $a > 0$

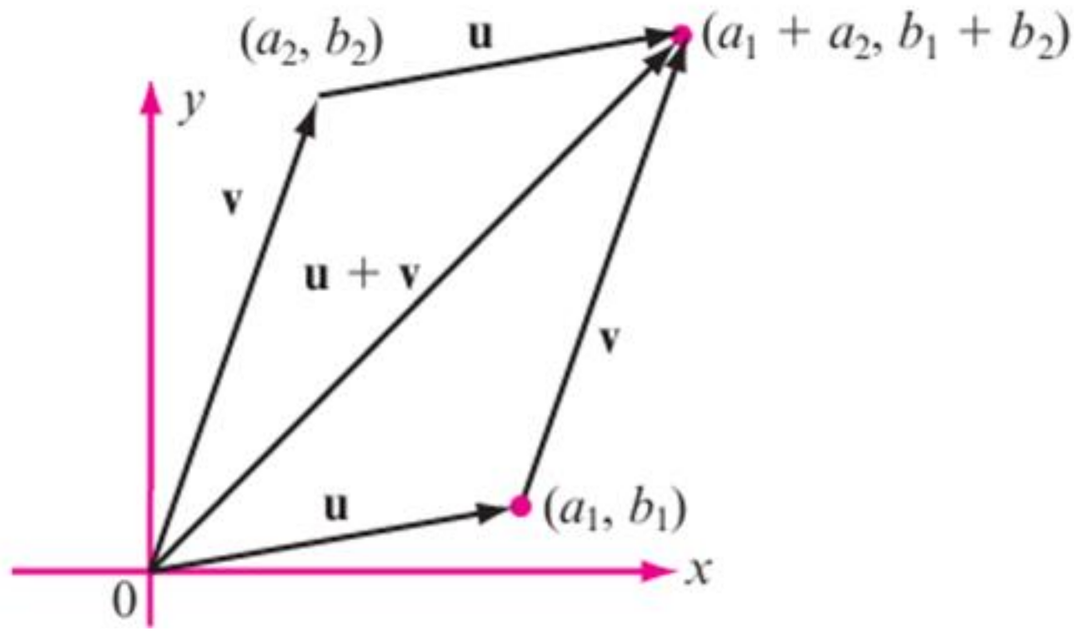
  Dirección de $k\vec{v}$ = (dirección de $\vec{v}$) + π si $a < 0$

Vectores en el plano - Operaciones

Suma de vectores

$\vec{\boldsymbol{u}} = (a_1, b_1)$ ***y*** $\vec{\boldsymbol{v}} = (a_2, b_2)$

$$\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

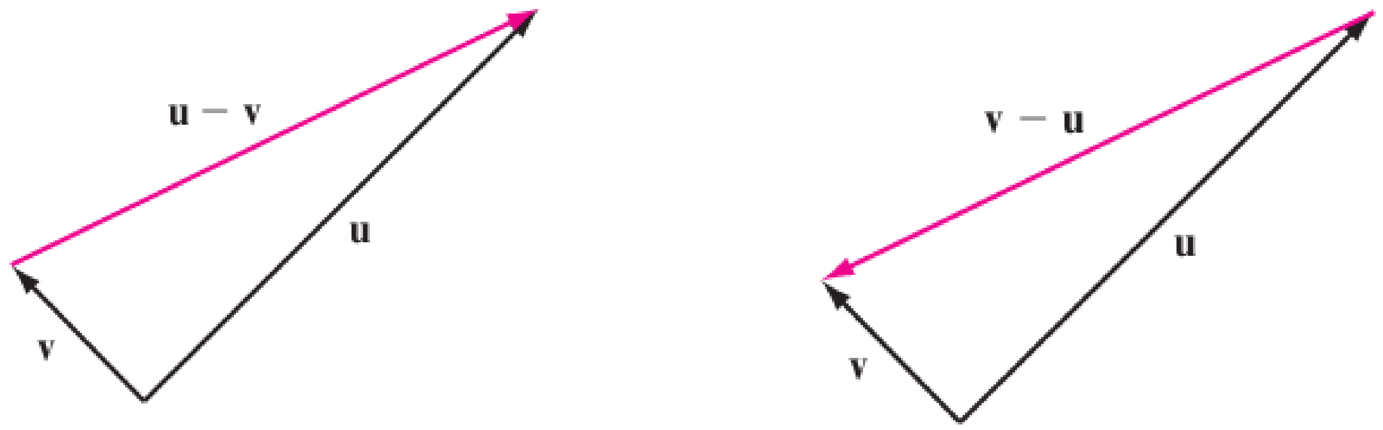


Vectores en el plano - Operaciones

Resta de vectores

$\vec{\boldsymbol{u}} = (a_1, b_1)$ ***y*** $\vec{\boldsymbol{v}} = (a_2, b_2)$

$$\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}} = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)$$



1. Encuentre la magnitud, la dirección y grafique cada uno de los siguientes vectores:

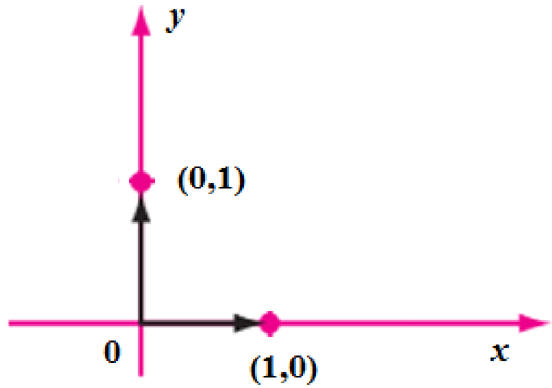
   a. $\boldsymbol{v} = (\sqrt{3}, -2)$
   b. $\boldsymbol{v} = (\sqrt{3}, 1)$
   c. $\boldsymbol{v} = (1, \sqrt{3})$
   d. $\boldsymbol{v} = (-2, \sqrt{3})$
   e. $\boldsymbol{v} = (1, -\sqrt{3})$
   f. $\boldsymbol{v} = (-1, -\sqrt{3})$

2. Sea $\boldsymbol{u} = (2, 3)$ y $\boldsymbol{v} = (-1, 2)$. Encuentre y grafique:

   a. $3\boldsymbol{u}$
   b. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$
   c. $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$
   d. $2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$

Vectores en el plano - Vectores especiales

Los vectores $\vec{\imath} =< 1{,}0 >$ y $\vec{\jmath} =< 0{,}1 >$

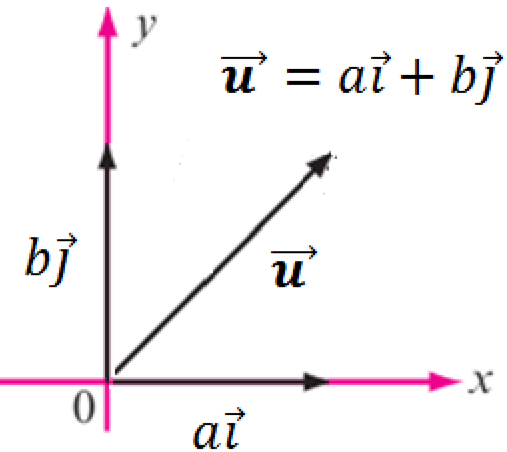


Dado $\vec{\boldsymbol{u}} =< a, b >$

$$\vec{\boldsymbol{u}} = < a, b > = < a, 0 > + < 0, b >$$

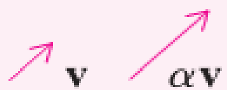
$$= a < 1, 0 > + b < 0{,}1 >$$

$$\vec{\boldsymbol{u}} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$$

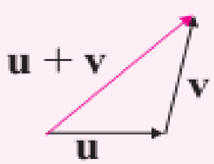
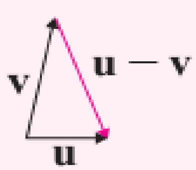


Todo vector de R^2 se puede escribir como ***combinación lineal*** de los vectores $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$.

Vectores en el plano

<table>
<tr><th>Objeto</th><th>Definición intuitiva</th><th>Expresión en términos de componentes si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$, y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$</th></tr>
<tr><td>Vector $\mathbf{v}$</td><td>Un objeto que tiene magnitud y dirección</td><td>$v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ o (v_1, v_2)</td></tr>
<tr><td>$|\mathbf{v}|$</td><td>Magnitud (o longitud) de $\mathbf{v}$</td><td>$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$</td></tr>
<tr><td>$\alpha\mathbf{v}$</td><td>


(en este dibujo $\alpha = 2$)</td><td>$\alpha v_1\mathbf{i} + \alpha v_2\mathbf{j}$ o $(\alpha v_1, \alpha v_2)$</td></tr>
<tr><td>$-\mathbf{v}$</td><td>

</td><td>$-v_1\mathbf{i} - v_2\mathbf{j}$ o $(-v_1, -v_2)$ o $-(v_1, v_2)$</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{u} + \mathbf{v}$</td><td>

</td><td>$(u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\mathbf{j}$ o $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{u} - \mathbf{v}$</td><td>

</td><td>$(u_1 - v_1)\mathbf{i} + (u_2 - v_2)\mathbf{j}$ o $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$</td></tr>
</table>

Vectores en el plano

Definición ***Producto escalar***

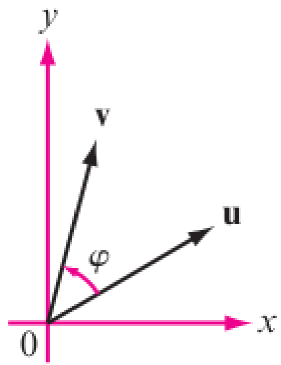
Si $\vec{\boldsymbol{u}} = (a_1, a_2)$ y $\vec{\boldsymbol{v}} = (b_1, b_2)$, entonces

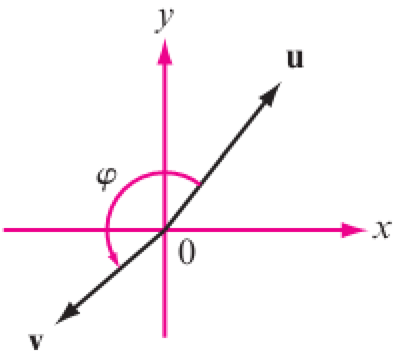
$$\vec{\boldsymbol{u}}.\vec{\boldsymbol{v}} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

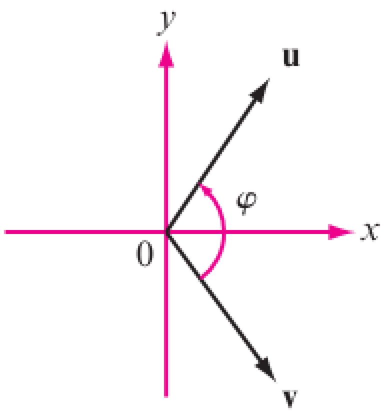
Definición ***Ángulo entre vectores***

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores diferentes de cero. Entonces el ángulo φ entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el ángulo no negativo más pequeño entre las representaciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que tienen al origen como punto inicial.

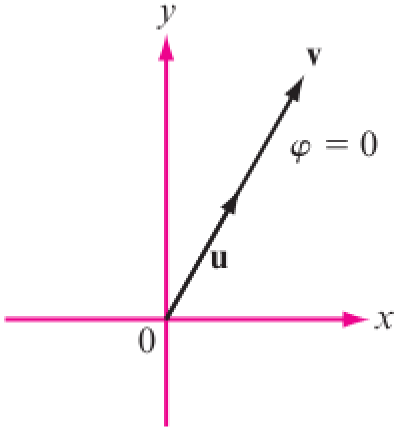
Vectores en el plano

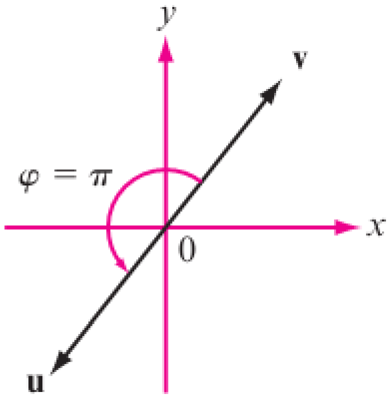






Si $\vec{u} = \alpha \ \vec{v}$ para algún escalar α, entonces $\begin{cases} \varphi = 0 \text{ si } \alpha > 0 \\ \varphi = \pi \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$





Vectores en el plano

¿*Cómo obtengo el ángulo entre dos vectores*?

Teorema

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores diferentes de cero. Si φ es el ángulo entre ellos , entonces

$$cos\varphi = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Observación

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|cos\varphi$$

Vectores en el plano

Definición ***Vectores paralelos***

Dos vectores diferentes de cero $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ***paralelos*** si el ángulo entre ellos $\varphi = 0$ o $\varphi = \pi$.

Teorema

$\vec{u}$ diferente de cero,

$\vec{v} = \alpha\vec{u}$ para alguna constante α si y sólo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ***paralelos*** .

Vectores en el plano

Definición ***Vectores ortogonales***
Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos son ***ortogonales*** (o ***perpendiculares)*** si el ángulo entre ellos $\varphi = \pi/2$.

Teorema
Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos son ***ortogonales*** si y sólo si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Calcule el producto escalar de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos

a. $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ b. $\boldsymbol{u} = -5\boldsymbol{i}$; $\boldsymbol{v} = 18\boldsymbol{j}$ c. $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$

Determine si los siguientes pares de vectores son paralelos, ortogonales o ninguno de los dos. Grafique cada par.

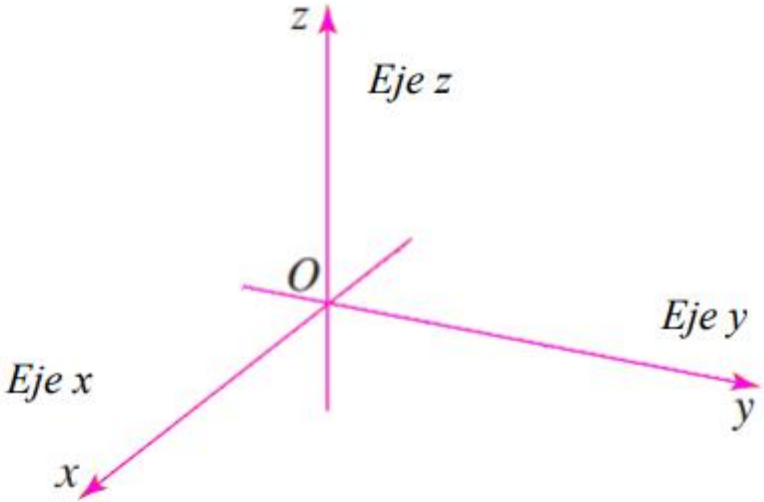
a. $\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{v} = -6\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j}$

b. $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{v} = -9\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$

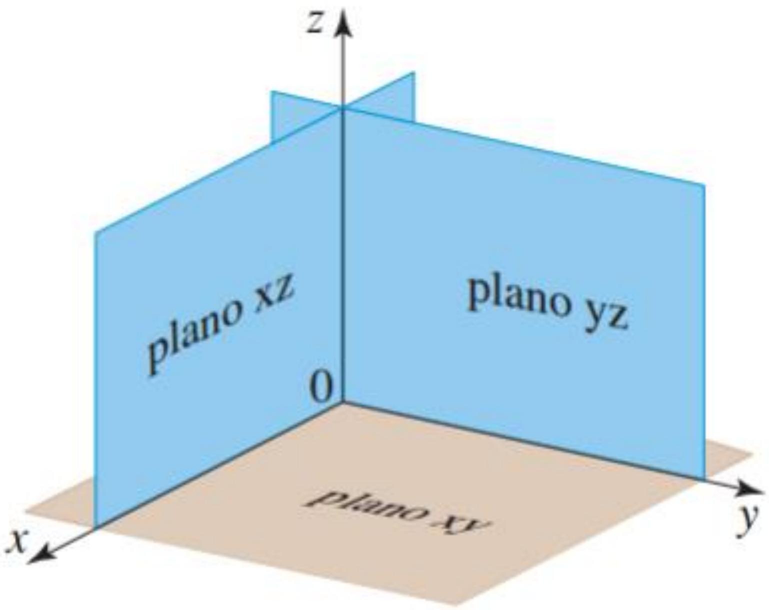
c. $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{v} = 6\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$

d. $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{v} = -9\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j}$

Vectores en el espacio



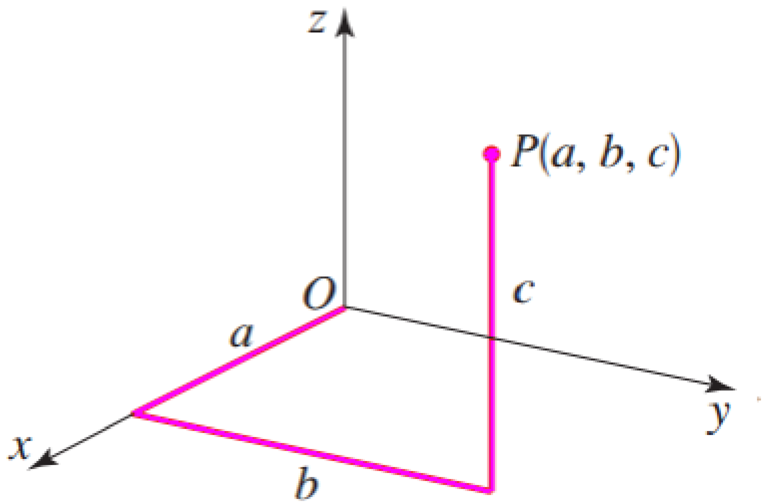
Ejes coordenados



Planos de coordenadas

Vectores en el espacio

Cualquier punto P en el espacio puede ser localizado por una ***terna ordenada*** de números reales (a,b,c)

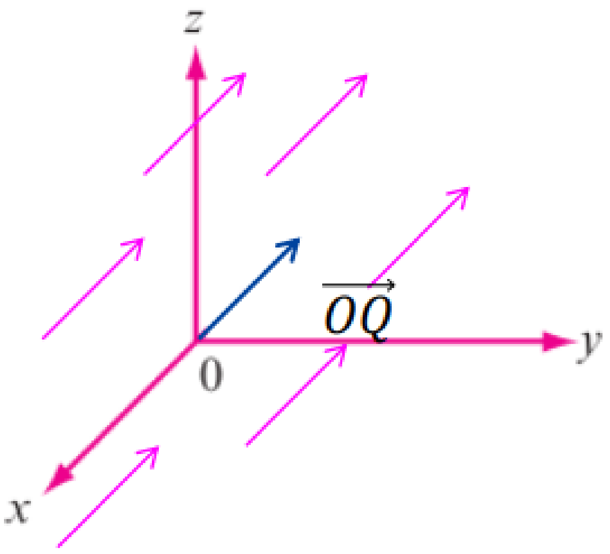


Punto $P(a, b, c)$

Vectores en el espacio

Vector en el espacio

Es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado, cualquier segmento Dirigido $\overrightarrow{PQ}$ en ese conjunto se llama ***representación*** del vector.



Sea P el origen y el punto $Q(x,y,z)$

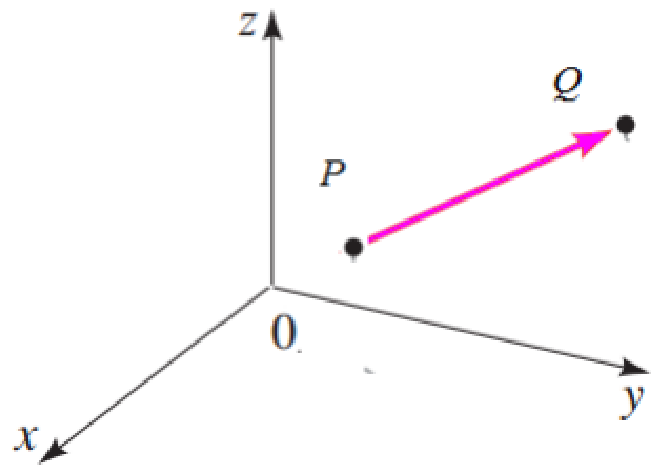
$$\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$$

Vectores en el espacio

¿Cómo obtenemos las componentes de $\overrightarrow{PQ}$?

Si un vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ está representado en el espacio con punto inicial $P(x_1, y_1, z_1)$ y punto terminal Q(x_2, y_2, z_2) , entonces

$$\vec{v} = < x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 >$$

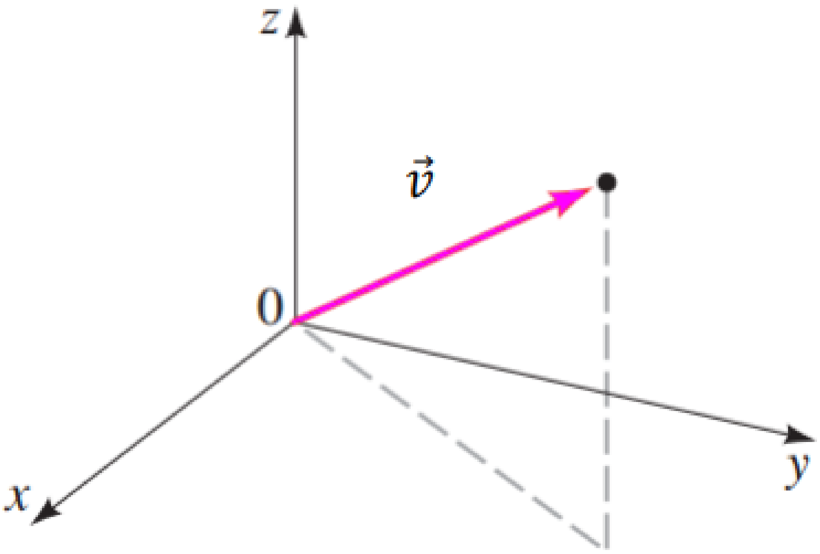


Vectores en el espacio

Sea el vector $\vec{v} = (v_1\ , v_2, v_3)$

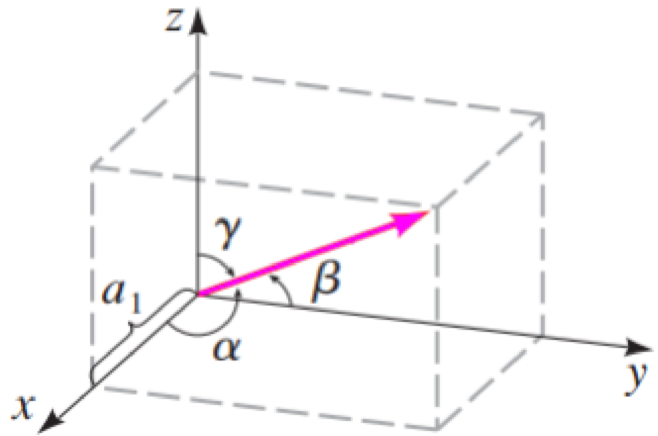
Magnitud ó módulo

$|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$



Vectores en el espacio

Ángulos directores



α, β y γ ***ángulos directores***

α como el ángulo entre $\vec{v}$ y el *eje x* positivo, β como el ángulo entre $\vec{v}$ y el *eje y* positivo, y γ como el ángulo entre $\vec{v}$ y el *eje z* positivo.

cosenos directores

$$\cos\alpha = \frac{x_0}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\beta = \frac{y_0}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\gamma = \frac{z_0}{|\mathbf{v}|}$$

Vectores en el espacio

Operaciones

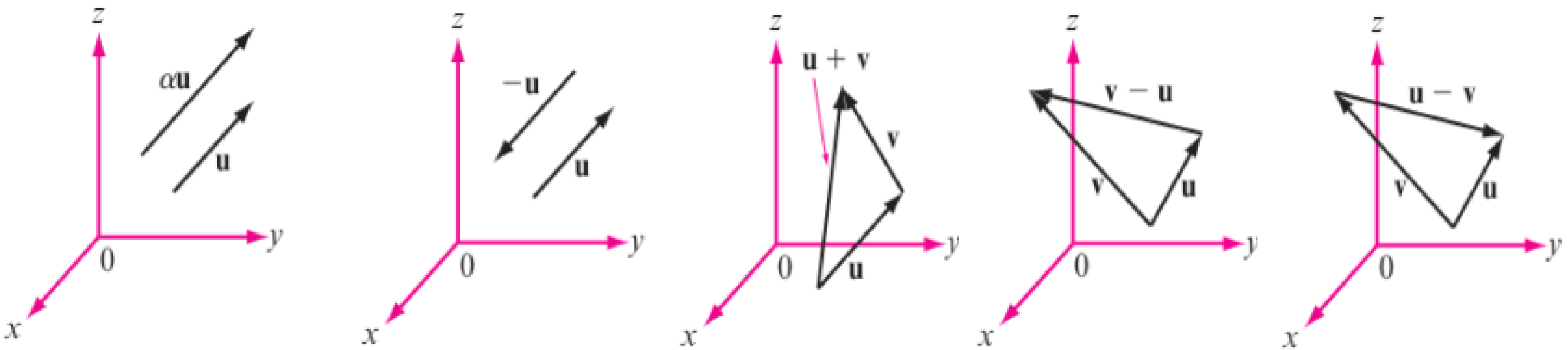
Sean $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ dos vectores en el espacio y α un escalar (número real) . Entonces se define

Suma de vectores

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Producto por un escalar

$$\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$



Vectores en el espacio

¿Cómo obtengo el ángulo entre dos vectores?

Teorema

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores diferentes de cero. Si φ es el ángulo entre ellos , entonces

$$cos\varphi = \frac{\vec{u} \,.\, \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Observación

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|cos\varphi$$

Vectores en el espacio

Definición ***Vectores paralelos***
Dos vectores diferentes de cero $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ***paralelos*** si el ángulo entre ellos $\varphi = 0$ o $\varphi = \pi$.

Teorema
$\vec{u}$ diferente de cero,
$\vec{v} = \alpha\vec{u}$ para alguna constante α si y sólo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ***paralelos*** .

Vectores en el espacio

Definición **Vectores ortogonales**

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos son ***ortogonales*** (o ***perpendiculares)*** si el ángulo entre ellos $\varphi = \pi/2$.

Teorema

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos son ***ortogonales*** si y sólo si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Vectores en el espacio

Encuentre la distancia entre los puntos $(3, -4, 3)$ y $(3, 2, 5)$.

Encuentre la magnitud y los cosenos directores del vector dado:

a. $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{j}$ b. $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ c. $\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ d. $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

Sean $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{t} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$. Calcule:

a. $\boldsymbol{t} + 3\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}$

b. $\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$

c. $(3\boldsymbol{t} - 2\boldsymbol{u}) \cdot (5\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{w})$